目　录

第五章 在非平静大气中飞行器的运动方程

第六章 飞行器运动的计算和分析方法

附录 四元数在飞行器运动方程中的应用

参考文献

符 号 说 明

1. 物理矢量用黑体字母表示。例如

$$\mathbf{v}，\boldsymbol{\omega}，\mathbf{F}$$

2. 矩阵

i)当写出全部元素时，用[ ]表示。例如

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{bmatrix}$$

ii)当用字母代表整个矩阵时，用黑体字母表示。并且，列阵往往用小写字母表示，例如$\mathbf{r}_p$；其它阵用大写字母表示，例如$\mathbf{B}_d^i$。

iii)斜对称矩阵，用上标ss表示，例如

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}^{ss} \text{或}\ \boldsymbol{\omega}^{ss}\text{代表} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

iv)逆矩阵用上标-1表示；

转置矩阵用上标T表示。

引　言

飞行器的运动方程是对飞行器运动规律的原始描述。对于航空和航天器的设计、试验和使用来说，飞行器航迹（弹道）的计算以及稳定性和操纵性的分析是十分必要的，而这些工作都必须以飞行器的运动方程为出发点。

不同类型的飞行器，由于飞行条件的不同，描述其运动的方程也不相同。例如，对于研究常规飞机或战术导弹来说，可以把大地当作平坦的、不旋转的；而对于研究超高速的飞行器（如弹道式火箭或人造卫星运载火箭）来说，大地的球形和旋转就成为不可忽略的因素。在紊流大气中飞行器的运动方程就比在平静大气中的运动方程复杂得多。进行飞行器航迹计算时往往采用全量的运动方程；而进行飞行器的稳定性和操纵性分析以及控制系统设计时，则常常采用线性化的运动方程。此外，即使在同样的飞行条件下，运动方程也可以列写成几种不同的形式，这可能是由于研究者的传统习惯、或者其它特点决定的。所以在航空航天科技文献中出现多种多样的飞行器运动方程，有关的科技人员应深入理解这些方程的实质和特点，并根据实际情况加以选择。

此外，任何文献（包括本书）中列举的飞行器运动方程都不可能是包罗万象的。科技人员必须具备根据具体的特殊情况建立运动方程的能力，才能解决各种各样的有关飞行器运动的问题。

本书就是为了满足上述的需要而写成的关于飞行器运动方程的一部专著。一方面，系统地推导并论述各种飞行器在各种具体条件下的运动方程；另一方面，讲述建立飞行器运动方程的一般原理和方法。

本书由六章组成。第一章讲述一些预备知识，主要是以矩阵形式书写的关于坐标变换的通用公式以及刚体动力学的一般方程。第二章在平面大地的假设下（即不考虑地球的曲率和旋转）建立飞行器的运动方程，这些方程适合于速度不太高的飞机和战术导弹。第三章则考虑到地球的曲率和旋转建立超高速飞行器的运动方程，而且对于特殊类型的飞行器——弹道式火箭或人造卫星运载火箭——的运动方程作了专门的描述。第四章介绍飞行器运动方程的线性化形式，这样的常系数线性微分方程组适宜于飞行器的稳定性和操纵性品质的分析以及控制系统的设计。第五章讲述在非平静大气中飞行器的运动方程，用这些方程可以研究飞行器对风切变和大气紊流的响应。第六章介绍飞行器运动的计算和分析方法，包括：作为线性系统的飞行器的动态特性分析，作为非线性系统的飞行器运动微分方程的数值求解，飞行器平衡状态的计算。

本书可供航空航天高等院校的高年级学生、研究生和教师以及航空航天部门的科技人员作为系统学习飞行器运动方程用的教材，亦可作为科技工作者的实用参考资料。此外，对于综合大学力学系的师生也有一定的参考价值。

第一章　预备知识

§1　坐标变换的一般方法和性质

1-1　坐标变换矩阵的定义

设：某个空间矢量 $\mathbf{r}$ 在坐标系 S_p（即 $O_p x_p y_p z_p$）和 S_q（即 $O_q x_q y_q z_q$）中的分量分别为（x_p，y_p，z_p）和（x_q，y_q，z_q）（见图1-1）。它们之间的关系可以用如下矩阵形式表示：

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

其中的 b_{ij} 即是对应各轴之间的方向余弦：

$$\left.\begin{array}{lll} b_{11}=\cos(x_p,\ x_q), & b_{12}=\cos(y_p,\ x_q), & b_{13}=\cos(z_p,\ x_q) \\ b_{21}=\cos(x_p,\ y_q), & b_{22}=\cos(y_p,\ y_q), & b_{23}=\cos(z_p,\ y_q) \\ b_{31}=\cos(x_p,\ z_q), & b_{32}=\cos(y_p,\ z_q), & b_{33}=\cos(z_p,\ z_q) \end{array}\right\} \tag{1-2}$$

引用符号

$$\mathbf{r}_p=\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}\quad \mathbf{r}_q=\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} \tag{1-3}$$

$$\mathbf{B}_p^q=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{1-4}$$

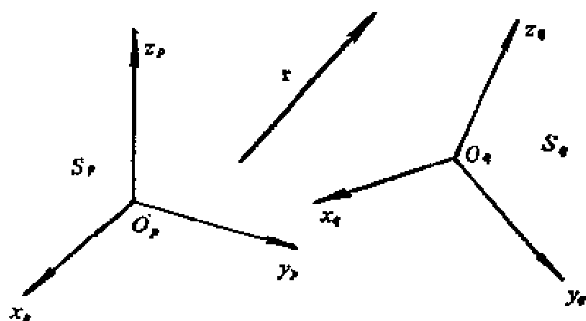


图1-1　坐标系 S_p 和 S_q

则式（1-1）可以写成

$$\mathbf{r}_q=\mathbf{B}_p^q\mathbf{r}_p \tag{1-5}$$

矩阵 $\mathbf{B}_p^q$ 称为由坐标系 S_p 到坐标系 S_q 的变换矩阵。坐标变换的问题可以归结为寻找坐标变换矩阵的问题。

因为在飞行力学的大多数坐标变换问题中，只注意坐标轴的指向，而不关心坐标原点的位置，所以以后将主要研究具有共同原点、不同指向的两个坐标系之间的关系。

1-2　坐标变换矩阵的基本性质

若仍然利用式（1-2）所规定的方向余弦符号，则有

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix}$$

或

$$\mathbf{r}_p=\mathbf{B}_q^p\mathbf{r}_q \tag{1-6}$$

其中
$$\mathbf{B}_q^p=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

比较式（1-4）与（1-7），可见
$$\mathbf{B}_q^p=(\mathbf{B}_p^q)^T \quad 或 \quad \mathbf{B}_p^q=(\mathbf{B}_q^p)^T \tag{1-8}$$
这里上标T表示矩阵转置。这就是说，B_p^q与B_q^p互为转置矩阵。

另一方面，由式（1-5）可以得到
$$\mathbf{r}_p=(\mathbf{B}_p^q)^{-1}\mathbf{r}_q$$
将此式与式（1-6）比较，得到
$$\mathbf{B}_q^p=(\mathbf{B}_p^q)^{-1} \ 或 \ \mathbf{B}_p^q=(\mathbf{B}_q^p)^{-1} \tag{1-9}$$
这表明，$\mathbf{B}_p^q$与$\mathbf{B}_q^p$互为逆矩阵。

由式（1-8）和式（1-9）可见
$$(\mathbf{B}_p^q)^T=(\mathbf{B}_p^q)^{-1} \tag{1-10}$$
具有这样性质的矩阵，在线性代数学中称为正交矩阵。正交矩阵的各元素满足如下关系：
$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} b_{ki}b_{kj}&=\begin{cases} 1 & 当i=j时 \\ 0 & 当i\neq j时 \end{cases} \\ \sum_{k=1}^{3} b_{ik}b_{jk}&=\begin{cases} 1 & 当i=j时 \\ 0 & 当i\neq j时 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$
也就是说，坐标变换矩阵的任一行（或列）的三元素的平方之和等于1；不同行（或列）的元素彼此乘积之和等于0。根据解析几何的定理，也能直接推出上述结论。

公式（1-8）、（1-9）、（1-10）和（1-11）反映了坐标变换矩阵的重要性质。

1-3 坐标系的基元变换

为了研究三维坐标系变换的一般关系式，首先来考虑三维坐标系变换的最简单情况（或者基元情况），即有一个轴彼此重合的情况。

设：有两个坐标系S_p和S_q，其中的轴z_p和z_q是重合的，而x_p，y_p与x_q，y_q之间有夹角α。假若坐标系S_p绕轴z_p转过角α，就达到坐标系S_q的位置（见图1-2a）。在此情况下，显然有
$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \tag{1-12}$$
或者写成
$$\mathbf{r}_q=\mathbf{B}_z(\alpha)\mathbf{r}_p$$
其中
$$\mathbf{B}_z(\alpha)=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-13}$$
是在上述条件下由坐标系S_p到S_q的变换矩阵。

同样地，如果坐标系S_p和S_q的轴y_p与y_q重合，并且当S_p绕轴y_p转过角α时就达到S_q的位置（见图1-2b），则由S_p到S_q的变换矩阵是

$$\mathbf{B}_y(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{1-14}$$

最后，如果坐标系S_p和S_q的轴x_p，x_q重合，并且当S_p绕轴x_p转过角α时就达到S_q的位置（见图1-2c），则由S_p到S_q的变换矩阵是

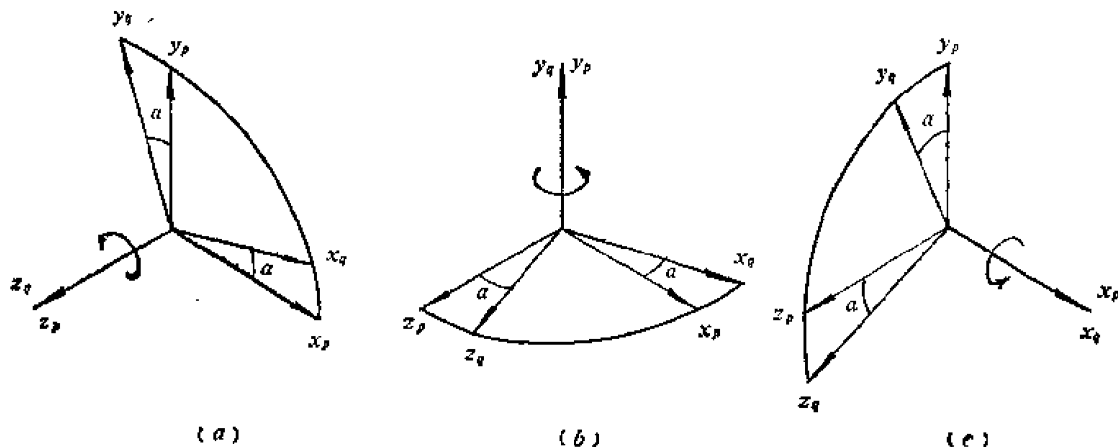


图1-2 坐标系的基元变换

$$\mathbf{B}_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{1-15}$$

式（1-13）、（1-14）和（1-15）所表示的三个变换矩阵，称为基元变换矩阵。

1-4 坐标系变换的一般情况

任意两个空间坐标系之间的关系可以用一组（三个）Euler角来表示。

设想：由坐标系S_p到S_q的过渡是通过如下三次转动来实现的（见图1-3）：首先，坐标系$Ox_py_pz_p$绕轴z_p转过一个角ζ（进动角），成为$Ox'y'z_p$；然后绕轴y'转过角η（章动角），成为$Ox_qy'z'$；最后绕轴x_q转过角ξ（自转角），到达$Ox_qy_qy_q$。角ζ、η、ξ组成一组Euler角。

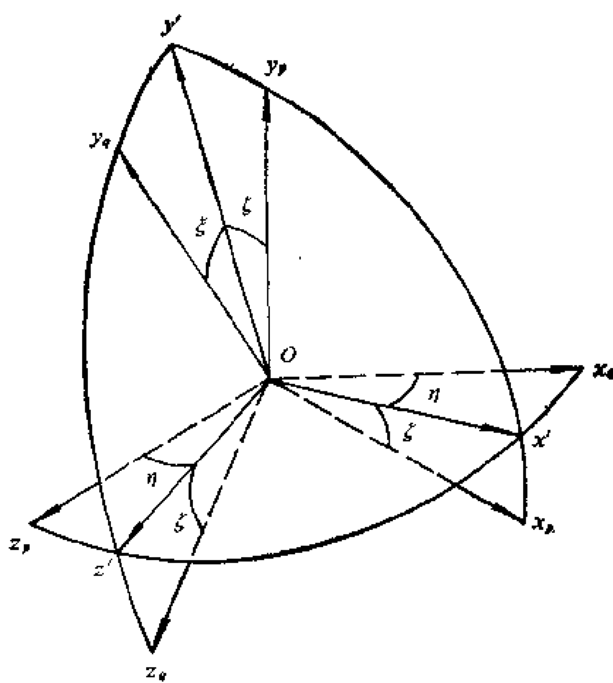


图1-3 坐标变换的一般情况

根据1-3节所讲述的原理，可以写出

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z_p\end{pmatrix}=\mathbf{B}_z(\zeta)\begin{pmatrix}x_p\\ y_p\\ z_p\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_q\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\mathbf{B}_y(\eta)\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z_p\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_q\\ y_q\\ z_q\end{pmatrix}=\mathbf{B}_x(\xi)\begin{pmatrix}x_q\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

把以上三式合起来，有

$$\mathbf{r}_q=\mathbf{B}_x(\xi)\mathbf{B}_y(\eta)\mathbf{B}_z(\zeta)\mathbf{r}_p$$

所以由S_p到S_q的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{B}_p^q = \mathbf{B}_x(\xi)\mathbf{B}_y(\eta)\mathbf{B}_z(\zeta) \qquad (1\text{-}16)$$

其中的$\mathbf{B}_z(\zeta)$、$\mathbf{B}_y(\eta)$、$\mathbf{B}_x(\xi)$ 的表达式可以按公式（1-13)、(1-14)、(1-15）写出，只要分别以ζ、η、ξ代替α。注意，式（1-16）中右边三个矩阵的书写顺序与对应的旋转顺序是相反的。

由此归纳出坐标变换的一般规则：首先确定，坐标系 S_p 经过怎样的三次基元旋转可以到达坐标系 S_q 的位置；然后把由 S_p 到 S_q 的坐标变换矩阵按照与基元旋转的顺序相反的顺序写成三个基元变换矩阵的乘积，且每个基元变换矩阵中的参数即是相应的基元旋转中的角度

必须指出，任意两个坐标系之间的变换矩阵是唯一的，但它们之间的Euler角则不只有一组，而有六组，这是因为，从一个坐标系到另一个坐标系的过渡，可以按以下六种不同的顺序进行：

$x-y-z$，$x-z-y$，$y-z-x$，$y-x-z$，$z-x-y$，$z-y-x$。转动顺序不同，则对应的一组（三个）Euler 角就不同，因而得到的坐标变换矩阵的表达式也就不同。但坐标变换矩阵的各元素的数值是唯一的，与所取转动顺序无关（参看式（1-1)、(1-2)）。

在实际问题中，两个坐标系之间的相互方位，往往只采用确定的一组Euler角来定义，这样的选择常常是由传统习惯决定的，或者由物理意义决定的，或者由测量方式决定的。例如飞机机体相对于地面的方位，用偏航角ψ、俯仰角ϑ和滚转角γ来确定（详见第二章§2），而不用其它方式来确定。

1-5 坐标变换矩阵的传递

设有三个坐标系S_p，S_g和S_q，且已知变换矩阵$\mathbf{B}_p^g$和$\mathbf{B}_g^q$，如何求出$\mathbf{B}_p^q$?

因为 $\mathbf{r}_q = \mathbf{B}_g^q \mathbf{r}_g$，$\mathbf{r}_g = \mathbf{B}_p^g \mathbf{r}_p$

故 $\mathbf{r}_q = \mathbf{B}_g^q \mathbf{B}_p^g \mathbf{r}_p$

由此得到

$$\mathbf{B}_p^q = \mathbf{B}_g^q \mathbf{B}_p^g \qquad (1\text{-}17)$$

这就是坐标变换的传递公式。

1-6 物理矩阵的转换

设想，有两个物理矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，它们在任意坐标系中的分量由如下关系式联系：

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} \qquad (1\text{-}18)$$

其中$\mathbf{A}$是3×3维物理矩阵，它的元素的值依赖于所选取的坐标系。

在坐标系S_p中，$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$的分量的关系是

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{u}_p \qquad (1\text{-}19)$$

在坐标系S_q中

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{A}_q \mathbf{u}_q \qquad (1\text{-}20)$$

此外，可以利用坐标变换矩阵$\mathbf{B}_q^p$把同一物理矢量在不同坐标系中的分量联系起来：

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{B}_q^p \mathbf{v}_q \qquad \mathbf{u}_p = \mathbf{B}_q^p \mathbf{u}_q \qquad (1\text{-}21)$$

把它们代入式（1-19）中：

$$\mathbf{B}_q^p \mathbf{v}_q = \mathbf{A}_p \mathbf{B}_q^p \mathbf{u}_q$$

由此式，利用式（1-9），得到

$$\mathbf{v}_q=\mathbf{B}_p^q\mathbf{A}_p\mathbf{B}_q^p\mathbf{u}_q$$

把它与式（1-20）比较，就得到

$$\mathbf{A}_q=\mathbf{B}_p^q\mathbf{A}_p\mathbf{B}_q^p \tag{1-22}$$

这个公式的意义是由坐标系 S_p 中的矩阵 $\mathbf{A}_p$ 换算出坐标系 S_q 中的矩阵 $\mathbf{A}_q$，其中 $\mathbf{A}$ 是 3×3 维矩阵，且具有式（1-18）所表示的物理意义。例如，后面将看到，刚体的动量矩矢量 $\mathbf{H}$ 与角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 是通过惯性矩阵 $\mathbf{I}$ 相连系的（参见式（1-40）），因此可以按照公式（1-22）把惯性矩阵（及其每一个元素）由一个坐标系换算到另一个坐标系。利用公式(1-22)的另一个例子是气动旋转导数的换算（见第四章§6）。

§2　旋转坐标系中矢量的导数

2-1　基本情况

设：活动坐标系 $Oxyz$ 具有角速度 $\boldsymbol{\omega}$（见图1-4）。矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在此坐标系中的分量为 ω_x、ω_y、ω_z，即

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k}$$

其中 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 是 x、y、z 轴的单位矢量。

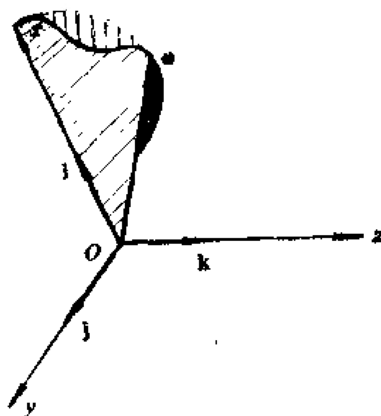


图 1-4

设有一个可变的矢量 $\mathbf{a}(t)$，它在此坐标系中的分量为 a_x，a_y，a_z，即

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k} \tag{1-23}$$

由上式求矢量 $\mathbf{a}$ 对时间 t 的导数：

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{da_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{da_z}{dt}\mathbf{k}+a_x\frac{d\mathbf{i}}{dt}+a_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}+a_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{1-24}$$

理论力学已指出，当一个刚体绕定点 O 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时，刚体上任何一点 P 的速度等于

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{1-25}$$

其中 $\mathbf{r}$ 是从 O 点引向 P 点的矢径。

现在，把单位矢量 $\mathbf{i}$ 看作是活动坐标系中某一点 P 的矢径，于是，与式（1-25）类似。可以写出

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}$$

同样地，有

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}\ ,\qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}$$

把以上关系式代入式（1-24）中，得到

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{da_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{da_z}{dt}\mathbf{k}+\boldsymbol{\omega}\times(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})$$

最后得到旋转坐标系中矢量的导数的公式

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a} \tag{1-26}$$

其中

$$\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t}=\frac{da_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{da_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{da_z}{dt}\mathbf{k} \tag{1-27}$$

$\delta\mathbf{a}/\delta t$称为在活动坐标系中的“相对导数”，相当于站在此活动坐标系中的观察者所看到的矢量 $\mathbf{a}$ 的变化率。而$d\mathbf{a}/dt$则称为“绝对导数”，相当于站在固定坐标系中的观察者所看到的矢量 $\mathbf{a}$ 的变化率。例如，若 $\mathbf{a}$ 是某点的矢径，则$\delta\mathbf{a}/\delta t$代表该点的相对速度（相对于动坐标系），而$d\mathbf{a}/dt$则代表该点的绝对速度。

2-2 更一般情况

现在把公式（1-26）推广到更一般的情况。设坐标系$S_0(O_0x_0y_0z_0)$是静止的，坐标系$S_1(O_1x_1y_1z_1)$和$S_2(O_2x_2y_2z_2)$分别具有角速度$\boldsymbol{\omega}_1$和$\boldsymbol{\omega}_2$。某一矢量$\mathbf{a}(t)$可以分别在坐标系S_1和S_2中分解成

$$\mathbf{a}(t)=a_{x1}\mathbf{i}_1+a_{y1}\mathbf{j}_1+a_{z1}\mathbf{k}_1=a_{x2}\mathbf{i}_2+a_{y2}\mathbf{j}_2+a_{z2}\mathbf{k}_2$$

根据矢量导数的公式（1-26）和（1-27），有

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\left(\frac{\delta\mathbf{a}}{dt}\right)_1+\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{a}=\left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t}\right)_2+\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{a}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t}\right)_1&=\frac{da_{x1}}{dt}\mathbf{i}_1+\frac{da_{y1}}{dt}\mathbf{j}_1+\frac{da_{z1}}{dt}\mathbf{k}_1\\\left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t}\right)_2&=\frac{da_{x2}}{dt}\mathbf{i}_2+\frac{da_{y2}}{dt}\mathbf{j}_2+\frac{da_{z2}}{dt}\mathbf{k}_2\end{aligned}\right\}$$

分别为矢量 $\mathbf{a}$ 在坐标系S_1和S_2中的相对导数。

由此得到

$$\left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t}\right)_1=\left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t}\right)_2+(\boldsymbol{\omega}_2-\boldsymbol{\omega}_1)\times\mathbf{a} \tag{1-28}$$

这个公式表示同一矢量 $\mathbf{a}$ 在不同坐标系中的相对导数之间的关系。这里的$(\boldsymbol{\omega}_2-\boldsymbol{\omega}_1)$就是坐标系$S_2$相对于$S_1$的转动角速度。

§ 3 矢量乘积的矩阵表示法

大家知道，矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的叉乘积$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$是一个矢量，在坐标系$xyz$中它的分量等于

$$\begin{aligned}&a_yb_z-a_zb_y\\&a_zb_x-a_xb_z\\&a_xb_y-a_yb_x\end{aligned}$$

利用矩阵表示法，可以写成

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0&-a_z&a_y\\a_z&0&-a_x\\-a_y&a_x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} \tag{1-29}$$

上式右边第一个矩阵称为 a 的斜对称矩阵（*skew-symmetric matrix*）。为了今后书写方便起见，采用如下简便符号

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}^{ss} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

于是公式（1-29）可以写成

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}^{ss}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \tag{1-29$'$}$$

或

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}^{ss}\mathbf{b} \tag{1-29$''$}$$

另外，点乘积 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 是一个标量，等于

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

利用矩阵表示法，写成

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=[a_x \;\; a_y \;\; a_z]\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \tag{1-30}$$

或

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}^T\mathbf{b} \tag{1-30$'$}$$

公式（1-29）和（1-30）就是矢量的乘积的矩阵表达式。

§4　刚体的一般运动方程

4-1　在活动坐标系中列写的刚体质心动力学方程

在理论力学中知道，刚体质心的运动方程为

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F} \tag{1-31}$$

其中 m 为刚体的质量；$\mathbf{v}$ 为刚体质心相对于惯性参考系的速度矢量；$\mathbf{F}$ 为作用在刚体上的外力总矢量。

设：有一个活动的参考坐标系 $Oxyz$，它的旋转角速度为 $\boldsymbol{\omega}$。在该坐标系中，$\boldsymbol{\omega}$ 的分量为 ω_x、ω_y、ω_z，即

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k} \tag{1-32}$$

其中 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 为沿 x、y、z 轴的单位矢量。

同样，质心速度 $\mathbf{v}$ 和力 $\mathbf{F}$ 也在该活动坐标系中分解如下：

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}&=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k} \\ \mathbf{F}&=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k} \end{aligned}\right\} \tag{1-33}$$

根据在旋转坐标系中矢量的导数的公式（1-26），方程（1-31）可以写成

$$m\left(\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta t}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\right)=\mathbf{F} \tag{1-34}$$

其中

$$\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta t}=\frac{dv_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dv_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} \tag{1-35}$$

利用公式（1-29），则方程（1-34）可以写成如下矩阵形式：

$$m\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \tag{1-36}$$

展开后，写成三个标量方程如下：

$$\begin{aligned} m\left(\frac{dv_x}{dt}+\omega_y v_z-\omega_z v_y\right)&=F_x \\ m\left(\frac{dv_y}{dt}+\omega_z v_x-\omega_x v_z\right)&=F_y \\ m\left(\frac{dv_z}{dt}+\omega_x v_y-\omega_y v_x\right)&=F_z \end{aligned} \tag{1-37}$$

这就是在任意活动参考坐标系中列写的刚体质心动力学方程。在以后的两章中将把方程（1-37）应用到不同的坐标系。

4-2 刚体绕质心转动的动力学方程

由理论力学中得知，刚体转动的动力学方程是

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=\mathbf{M} \tag{1-38}$$

其中$\mathbf{M}$是作用在刚体上的外力对刚体质心的力矩总矢量。

$\mathbf{H}$是刚体对质心的动量矩，其一般表达式是

$$\mathbf{H}=\int \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})dm \tag{1-39}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$是刚体的转动角速度；

$\mathbf{r}$是由质心O到质点dm的矢径。

若以质心为原点，建立一个与刚体固连的坐标系$Oxyz$，则动量矩$\mathbf{H}$的分量与角速度$\boldsymbol{\omega}$的分量有如下关系：

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{1-40}$$

其中 $I_x=\int(y^2+z^2)dm$， $I_y=\int(z^2+x^2)dm$， $I_z=\int(x^2+y^2)dm$，

$I_{xy}=\int xydm$， $I_{yz}=\int yzdm$， $I_{zx}=\int zxdm$

分别是刚体对坐标系$Oxyz$的转动惯量和惯性积。而公式（1-40）右边的方形阵称为惯性阵。

把旋转坐标系中矢量的导数的公式（1-26）应用到刚体旋转动力学方程（1-38）中，有

$$\frac{\delta\mathbf{H}}{\delta t}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{H}=\mathbf{M} \tag{1-41}$$

利用公式（1-29′），把上式写成矩阵形式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}^{ss} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

展开后，得

$$\left.\begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} + \omega_y H_z - \omega_z H_y = M_x \\ \frac{dH_y}{dt} + \omega_z H_x - \omega_x H_z = M_y \\ \frac{dH_z}{dt} + \omega_x H_y - \omega_y H_x = M_z \end{aligned}\right\} \tag{1-42}$$

把H_x、H_y、H_z的表达式(1-40)代入上式,并假定I_x, I_y……为常数,最后得到最一般情况下刚体绕质心转动的动力学方程的标量形式如下：

$$\left.\begin{aligned} & I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx}\left(\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y\right) - \\ & \qquad - I_{xy}\left(\frac{d\omega_y}{dt} - \omega_z\omega_x\right) = M_x \\ & I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy}\left(\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z\right) - \\ & \qquad - I_{yz}\left(\frac{d\omega_z}{dt} - \omega_x\omega_y\right) = M_y \\ & I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz}\left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z\omega_x\right) - \\ & \qquad I_{zx}\left(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y\omega_z\right) = M_z \end{aligned}\right\} \tag{1-43}$$

某些情况下，飞行器中的高速旋转部件(例如喷气发动机的压气机转子和涡轮转子)对飞行器的转动运动产生明显的影响，它称为陀螺效应。因此在飞行器运动方程中有必要计及这种效应。

作为最一般情况，假设旋转部件的动量矩在与飞行器固连的坐标系中具有三个分量：

$$\mathbf{H}_r = H_{rx}\mathbf{i} + H_{ry}\mathbf{j} + H_{rz}\mathbf{k} \tag{1-44}$$

于是整个飞行器的动量矩表达式（1-40）中要分别加上H_{rx}、H_{ry}、H_{rz}。

把上述情况计入方程（1-42）中，于是飞行器转动动力学方程应修正成为

$$\left.\begin{aligned} \cdots + \frac{dH_{rx}}{dt} + \omega_y H_{rz} - \omega_z H_{ry} = M_x \\ \cdots + \frac{dH_{ry}}{dt} + \omega_z H_{rx} - \omega_x H_{rz} = M_y \\ \cdots + \frac{dH_{rz}}{dt} + \omega_x H_{ry} - \omega_y H_{rx} = M_z \end{aligned}\right\} \tag{1-45}$$

其中被省略的部分（…）即是方程（1-43）的左边。

第二章　“平面大地”情况下的飞行器运动方程

本章在“平面大地”的假设下，即在不考虑大地（地球）的曲率和旋转的条件下建立刚性飞行器的运动方程式。对于目前大多数类型的飞行器，即各种飞机和战术导弹来说，把大地看作平面是适宜的。所以本章建立的运动方程有广阔的应用场所。考虑大地曲率和旋转时的飞行器运动方程将在第三章进行研究。

本章中在定义坐标系和运动变量时考虑风的存在，但在建立运动方程时假设大气是平静的（即假定无风）。在非平静大气中飞行器的运动方程将在第五章中讲述。

§1　坐标系的定义

1-1　概述

为了研究平面大地情况下飞行器的运动，需要建立若干套坐标系（或称坐标轴系或轴系）。所有这些都是右手直角坐标系，不再一一指出。

首先要解释几个名词。飞行器质心相对于大地的速度称为对地速度，简称地速，以符号 **v** 表示。飞行器质心相对于未受扰空气（即远前方空气）的速度称为对空速度，简称空速，以符号 **u** 表示。空气的移动速度称为风速，它以符号 **w** 表示。它们之间的关系是

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$$

当大气为静止不动，即风速为零时，飞行器的地速与空速是一致的。这时，它们统称为飞行速度。

1-2　地面坐标系

地面（或大地）坐标系$O_Dx_Dy_Dz_D$（见图2-1或2-2）固定于大地。它的原点O_D选取在地面上的某一点（例如起飞点）。轴y_D铅垂向上。轴x_D和z_D在水平面内，它们的指向可以按具体条件加以选取（没有严格限制）。

因为不考虑大地的旋转，所以此坐标系可以看作是惯性坐标系。飞行器的位置和姿态以及速度和角速度等都是相对于此坐标系来衡量的。

若把原点放在飞行器质心，而坐标轴始终平行于地面坐标系的轴x_D、y_D、z_D，则这样构成的坐标系$Ox_dy_dz_d$称为飞行器牵连的地面坐标系（见图2-1或2-2）。当仅关心坐标系的方位，而不关心原点位置时，此坐标系可以简称为地面坐标系。

1-3　机体坐标系

机体坐标系$Ox_ty_tz_t$（见图2-1或2-3）固连于飞行器。原点O在飞行器质心。纵轴x_t平行于机身轴线或平行于机翼平均气动弦，指向前方。竖轴y_t在飞行器对称平面内，垂直于轴x_t，指向上方。横轴z_t垂直于飞行器对称平面，指向右方。

此坐标系的方位就代表飞行器在空间的姿态。

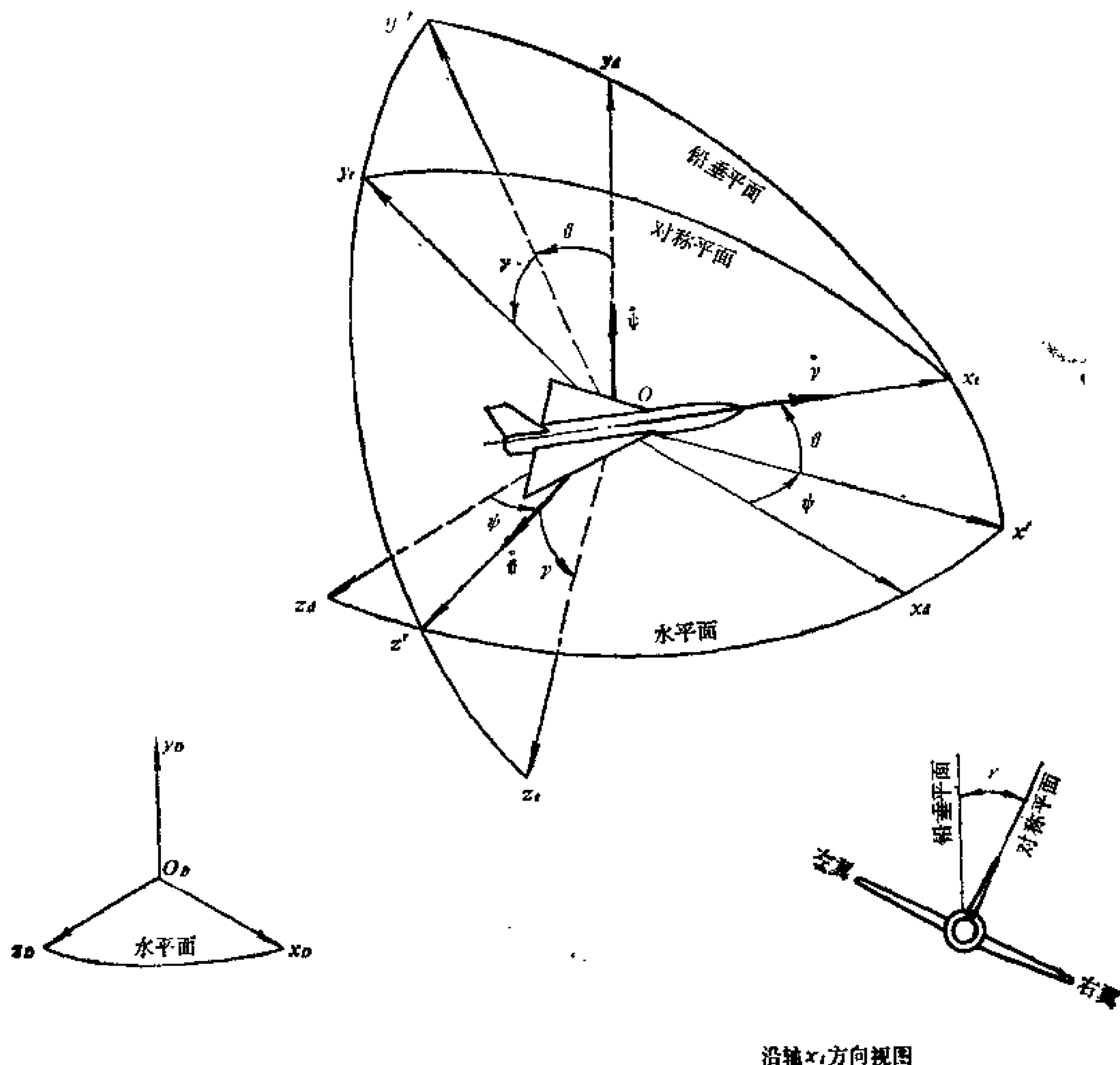


图2-1　地面坐标系与机体坐标系的关系

1-4　气流坐标系

气流坐标系$Ox_qy_qz_q$（见图2-3）的原点O在飞行器质心。轴x_q沿飞行器空速矢量**u**。轴y_q在飞行器对称平面内，垂直于轴x_q、指向上方。轴z_q垂直于平面x_qy_q，指向右方。

通常作用在飞行器上的空气动力是在此坐标系内分解成阻力Q（沿x_q负向）、升力Y和侧力Z的。

1-5　航迹坐标系

航迹坐标系$Ox_hy_hz_h$（见图2-2）的原点O在飞行器质心。轴x_h沿飞行器地速矢量**v**。轴y_h在包含矢量**v**的铅垂平面内，垂直于轴x_h，指向上方。轴z_h垂直于铅垂平面x_hy_h（因而是水平的），指向右方。

建立飞行器质心运动方程时，要利用此坐标系。

由定义可见，航迹坐标系的轴x_h与气流坐标系的轴x_q，当有风（$w\neq0$）时是不一致的，当无风（$w=0$）时才一致。

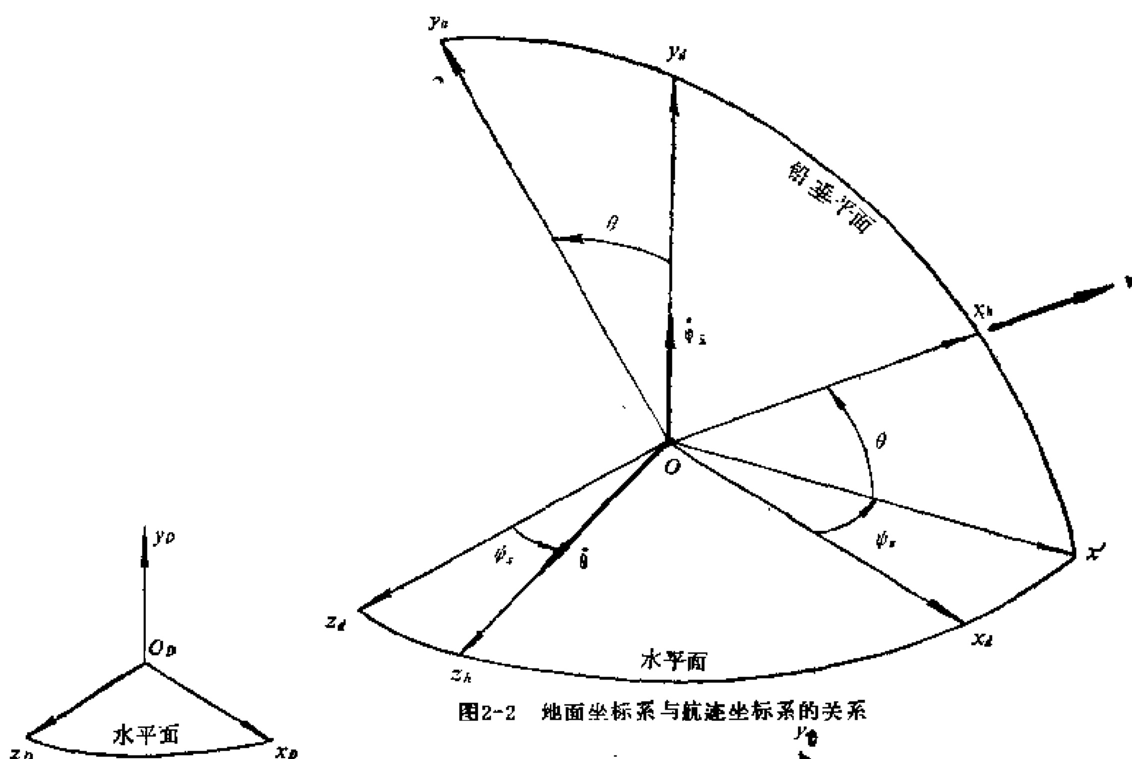


图2-2　地面坐标系与航迹坐标系的关系

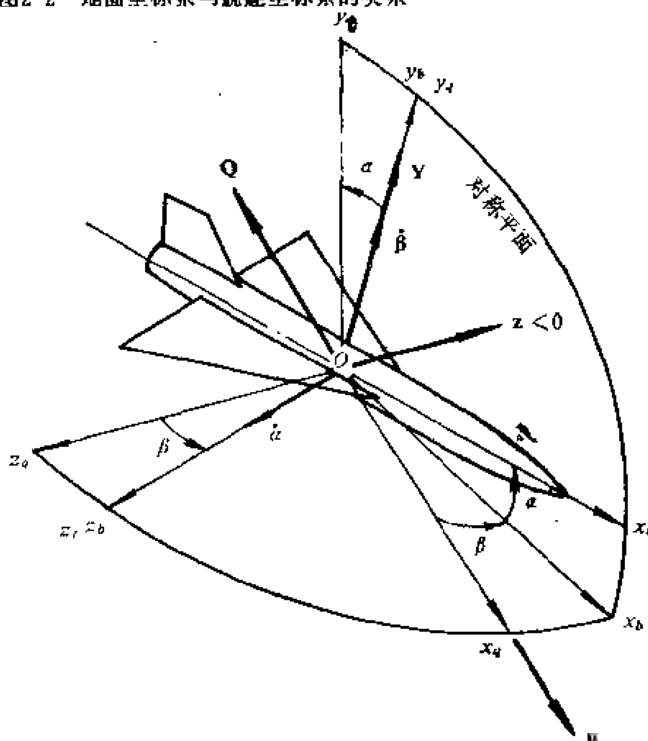


图2-3　气流坐标系、半机体坐标系和机体坐标系的关系

1-6　半机体坐标系

半机体坐标系 $Ox_hy_hz_b$（见图2-3）的原点 O 在飞行器质心。轴x_h沿空速矢量 **u** 在对称平面上的投影方向。轴y_h也在对称平面内，垂直于轴x_h，指向上方(因而与轴y_q一致)。轴z_b垂直于飞行器对称平面，指向右方（因而与轴z_t重合）。

有时，空气动力的分量是在半机体坐标系中分解的。

§2　各坐标系之間的关系及变換矩陣

各坐标系之间的关系用它们之间的 Euler 角来确定，而根据这些 Euler 角的定义就可以导出坐标系之间的变换矩阵。

2-1　地面坐标系与机体坐标系的关系

这两个坐标系之间的关系用以下三个角度来确定（见图2-1）。

偏航角ψ：机体轴x_t在水平面x_dz_d上的投影线与轴x_d之间的角度。如果轴x_t向左方偏离平面x_dy_d，则ψ为正。

俯仰角ϑ：机体轴x_t与水平面x_dz_d之间的角度。当轴x_t向上方倾斜时，ϑ为正。

滚转角（倾斜角）γ：飞行器对称平面x_ty_t与包含轴x_t的铅垂平面之间的角度。当z_t向下方倾斜、即当右翼下倾、左翼上倾时，γ为正。

这三个角ψ、ϑ、γ决定了飞行器在空间的姿态。

地面坐标系S_d可以依次经过三次转动，达到与机体坐标系S_t重合（图2-2）。首先$x_dy_dz_d$绕轴y_d转过角ψ，成为$x'y_dz'$；然后绕轴z'转过角ϑ，成为$x_ty'z'$；最后绕轴x_t转过γ角，达到与$x_ty_tz_t$重合。注意：x'、y'、z'是中间过渡轴，它们并不构成正交轴系。

因此，根据第一章1-4中讲述的一般原理，可以写出由S_d到S_t的变换矩阵为

$$\mathbf{B}_d^t=\mathbf{B}_x(\gamma)\mathbf{B}_z(\vartheta)\mathbf{B}_y(\psi) \tag{2-1}$$

按公式（1-13）、（1-14）、（1-15）写出基元变换矩阵

$$\mathbf{B}_x(\gamma)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_z(\vartheta)=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta & 0\\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_y(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix}$$

代入式（2-1）中，得到由地面坐标系S_d到机体坐标系S_t的变换矩阵为

$$\mathbf{B}_d^t=\begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\psi\\ -\cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi+\sin\gamma\sin\psi & \cos\gamma\cos\vartheta & \cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi+\sin\gamma\cos\psi\\ \sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi+\cos\gamma\sin\psi & \sin\gamma\cos\vartheta & -\sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi+\cos\gamma\cos\psi\end{pmatrix} \tag{2-2}$$

2-2 地面坐标系与航迹坐标系的关系

这两个坐标系之间的关系用如下两个角度来确定（见图2-2）。

航迹偏转角（航向角）ψ_s：航迹系的轴x_h（即地速矢量$\mathbf{v}$）在水平面x_dz_d上的投影线x'与地面系的轴x_d之间的角度。当速度$\mathbf{v}$向左方偏离平面x_dy_d时，ψ_s为正。

航迹倾斜角θ：轴x_h（即地速矢量$\mathbf{v}$）与水平面x_dz_d之间的角度。当速度$\mathbf{v}$向上倾斜（即飞行器爬升）时，θ为正。

角ψ_s和θ决定了飞行器地速矢量$\mathbf{v}$在空间的方向。

地面坐标系S_d可以通过如下的两次转动达到与航迹坐标系S_h重合。首先$x_dy_dz_d$绕轴y_d转过角ψ_s，成为$x'y_dz_h$；然后绕轴z_h转过角θ，成为$x_hy_hz_h$。

因此，由S_d到S_h的变换矩阵可以写成

$$\mathbf{B}_d^h = \mathbf{B}_z(\theta)\mathbf{B}_y(\psi_s) \quad (2\text{-}3)$$

按公式（1-13）和（1-14）写出$\mathbf{B}_z(\theta)$和$\mathbf{B}_y(\psi_s)$代入式（2-3）中，展开后，得到由地面坐标系到航迹坐标系的变换矩阵如下：

$$\mathbf{B}_d^h = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi_s & \sin\theta & -\cos\theta\sin\psi_s \\ -\sin\theta\cos\psi_s & \cos\theta & \sin\theta\sin\psi_s \\ \sin\psi_s & 0 & \cos\psi_s \end{pmatrix} \quad (2\text{-}4)$$

2-3 气流坐标系与机体坐标系的关系

这两个坐标系之间的关系用迎角和侧滑角来确定（见图2-3）。

侧滑角β：气流系的轴x_q（即空速矢量u）与飞行器对称平面$x_t y_t$之间的角度。若空速矢量偏向飞行器的右侧（即向右侧滑）则β为正。

迎角α：气流系的轴x_q（即空速矢量u）在对称平面上的投影x_b与机体轴x_t之间的角度。若空速u相对于机体的平面$x_t z_t$而言偏向下方，则α为正。

若气流坐标系$Ox_q y_q z_q$首先绕轴y_q转过角β，成为$Ox_b y_q z_t$（也就是半机体坐标系$Ox_b y_b z_t$），然后绕轴z_t转过α角，就成为机体坐标系$Ox_t y_t z_t$。

于是，由气流坐标系到机体坐标系的变换矩阵为

$$\mathbf{B}_q^t = \mathbf{B}_z(\alpha)\mathbf{B}_y(\beta) \quad (2\text{-}5)$$

相乘后，得到

$$\mathbf{B}_q^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (2\text{-}6)$$

2-4 半机体坐标系与气流坐标系和机体坐标系的关系

如上所述，半机体坐标系实质上是气流坐标系和机体坐标系之间的过渡坐标系。它们之间的几何关系已经介绍了。因此，很容易得到如下的两个变换矩阵。

由气流坐标系到半机体坐标系的变换矩阵

$$\mathbf{B}_q^b = \mathbf{B}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (2\text{-}7)$$

由半机体坐标系到机体坐标系的变换矩阵

$$\mathbf{B}_b^t = \mathbf{B}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2\text{-}8)$$

2-5 航迹坐标系与气流坐标系的关系

在一般情况、即有风（$\mathbf{w} \neq 0$）的情况下，这两个坐标系的关系非常复杂，因为它们之间有θ、ψ_s、ψ、ϑ、γ、α、β这些角度（以后通过图2-5将会看得清楚）。如果要得到变换矩阵，则必须写出

$$\mathbf{B}_h^q = \mathbf{B}_t^q \mathbf{B}_d^t \mathbf{B}_h^d \tag{2-9}$$

展开后，将繁杂不堪。

在特殊情况、即无风（$w=0$）的情况下，它们之间的关系十分简单。因为这时地速 **v** 与空速 **u** 相同，因而轴x_h与轴x_q一致，两个坐标系之间只有一个角度。这时气流系的轴y_q与航迹系的轴y_h之间（亦即z_q与z_h之间）的角度称为绕速度矢量的滚转角（简称速度滚转角）γ_s。当轴z_q向下偏时，γ_s为正（见图2-4）。

在此情况下，如果航迹坐标系$Ox_hy_hz_h$绕轴x_h转过角γ_s，就与气流坐标系$Ox_qy_qz_q$重合。因此变换矩阵为

$$\mathbf{B}_h^q = \mathbf{B}_x(\gamma_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_s & \sin\gamma_s \\ 0 & -\sin\gamma_s & \cos\gamma_s \end{pmatrix} \tag{2-10}$$

$(w=0)$

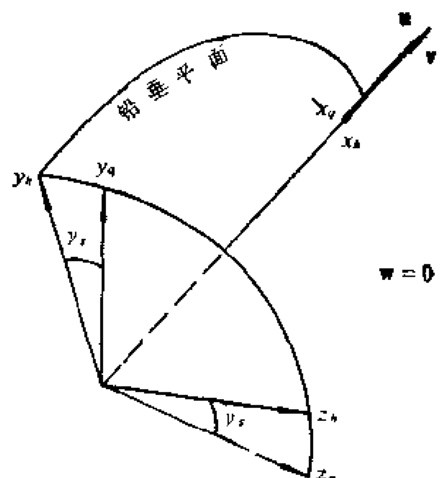


图2-4　无风时航迹坐标系与气流坐标系的关系

2-6　地面坐标系与气流坐标系的关系

在有风的情况下，这两个坐标系的关系只能通过机体坐标系来建立。根据公式（1-17），有

$$\mathbf{B}_d^q = \mathbf{B}_t^q \mathbf{B}_d^t \tag{2-11}$$

其中包含五个角：γ、ψ、ϑ、α、β。因此展开后的结果是相当复杂的。

在无风的情况下，这两个坐标系的关系可以通过航迹坐标系来建立，即

$$\mathbf{B}_d^q = \mathbf{B}_h^q \mathbf{B}_d^h \tag{2-12}$$

把式（2-10）和（2-4）代入，得到

$$\mathbf{B}_d^q = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi_s & \sin\theta & -\cos\theta\sin\psi_s \\ -\cos\gamma_s\sin\theta\cos\psi_s + \sin\gamma_s\sin\psi_s & \cos\gamma_s\cos\theta & \cos\gamma_s\sin\theta\sin\psi_s + \sin\gamma_s\cos\psi_s \\ \sin\gamma_s\sin\theta\cos\psi_s + \cos\gamma_s\sin\psi_s & -\sin\gamma_s\cos\theta & -\sin\gamma_s\sin\theta\sin\psi_s + \cos\gamma_s\cos\psi_s \end{pmatrix} \tag{2-13}$$

$(w=0)$

其中只包含3个角度：θ、ψ_s、γ_s这就简单得多。但是此式只适用于无风情况。

2-7　各个坐标系的相互关系的汇总

以上介绍的五套坐标系之间的相互关系可以用一个示意图（见图2-5）清楚而形象地表示出来。其中符号的含义是，例如$R_z(\alpha)$表示绕轴z转过α角。空白小方块表示过渡性的无名坐标系。虚线表示仅在无风条件下才存在的联系，实线则表示在任何条件（有风或无风）下都存在的联系。符号 // 表示平移。

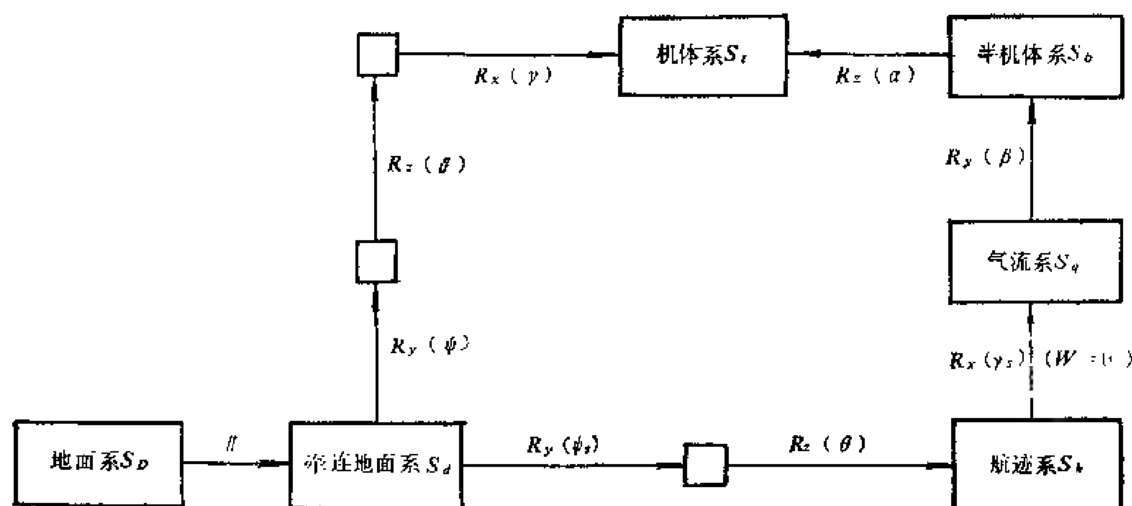


图2-5　各坐标系相互关系示意图

§3　作用在飞行器上的力和力矩

在空中飞行时作用在飞行器上的力包括：发动机推力**P**、空气动力**R**和重力**G**。下面说明这些力的特性以及它们对质心的力矩。

至于飞行器沿地面、水面滑跑或沿发射架运动时受到的约束力，则不予讨论。

3-1　发动机推力P

在正常情况（非故障情况）下发动机的总推力在飞行器对称平面Ox_ty_t内。设推力作用线与机体纵轴x_t构成角φ_p，并对于质心O有偏心距e_p。φ_p和e_p的正向在图2-6中作了规定。

因此，发动机推力在机体坐标系中的分量为：

$$P_{xt}=P\cos\varphi_p,\quad P_{yt}=P\sin\varphi_p,\quad P_{zt}=0 \tag{2-14}$$

推力力矩在机体坐标系中的分量为：

$$M_{xp}=0,\quad M_{yp}=0,\quad M_{zp}=Pe_p \tag{2-15}$$

当然，在故障状态下推力和推力矩的分量均有所不同，其表达式应按具体条件另行写出。

一般地说，发动机推力P随着飞行高度h、空速u和油门开度δ_p而变化。写成

$$P=P(u,h,\delta_p) \tag{2-16}$$

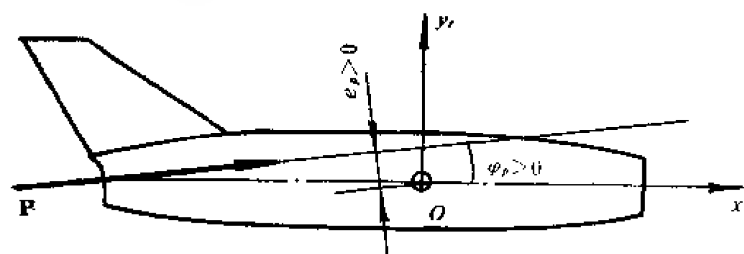


图2-6　发动机推力

这种关系通常以发动机特性曲线（速度特性、高度特性和油门特性）的形式给出。

3-2　空气动力R

通常把空气动力**R**在气流坐标系中分解成三个分量（见图2-3）：阻力Q（沿轴x_q负向），升力Y（沿轴y_q），侧力Z（沿轴z_q）。因而

$$\begin{pmatrix} R_{xq} \\ R_{yq} \\ R_{zq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{2-17}$$

空气动力分量可以表示成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} Q &= c_x \frac{1}{2} \rho u^2 S \\ Y &= c_y \frac{1}{2} \rho u^2 S \\ Z &= c_z \frac{1}{2} \rho u^2 S \end{aligned}\right\} \tag{2-18}$$

其中S为飞行器的参考面积，对于有翼式飞行器，S取为一对机翼面积，对于无翼式飞行器（例如弹道式导弹），S取为弹身横截面积；u为飞行器的对空速度；ρ为该高度上的大气密度：c_x、c_y、c_z分别称为阻力系数、升力系数和侧力系数，它们都取决于许多因素。对于一定的飞行器外形来说，通常有如下函数关系：

$$\left.\begin{aligned} c_x &= c_x(M,\ Re,\ \alpha,\ \delta_z;\ \beta,\ \delta_x,\ \delta_y) \\ c_y &= c_y(M,\ \alpha,\ \delta_z;\ \dot{\alpha},\ \omega_z) \\ c_z &= c_z(M,\ \beta,\ \delta_y;\ \omega_y,\ \dot{\beta}) \end{aligned}\right\} \tag{2-19}$$

以上式子中，分号（；）以后的是较次要因素，有时可以忽略不计。

$M=u/a$称为Mach数，$a=a(h)$是该高度上大气中的音速。$Re=uL/\nu$称为Reynolds数，其中L为飞行器参考长度，$\nu=\nu(h)$是该高度上大气的运动粘性系数。因此，对于给定的飞行器来说，有

$$\left.\begin{aligned} M &= M(u,\ h) \\ Re &= Re(u,\ h) \end{aligned}\right\} \tag{2-20}$$

δ_x、δ_y、δ_z是操纵面偏角，后面将作适当解释。

在某些资料（例如[7]）中规定，阻力、升力和侧力为空气动力**R**在半机体坐标系中的分量，因而列出的运动方程与大多数书籍（包括本书在内）有所差别，这是必须注意的。半机体坐标系中的阻力、升力和侧力Q_b、Y_b、Z_b与气流坐标系中的阻力、升力和侧力Q、Y、Z、有如下关系：

$$\begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{B}_b^q \begin{pmatrix} -Q_b \\ Y_b \\ Z_b \end{pmatrix}$$

也就是

$$\left.\begin{aligned} Q &= Q_b\cos\beta - Z_b\sin\beta \\ Y &= Y_b \\ Z &= Q_b\sin\beta + Z_b\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{2-21}$$

空气动力**R**对飞行器质心的力矩通常在机体坐标系中分解成三个分量：滚转力矩M_x（绕轴x_t）、偏航力矩M_y（绕轴y_t）和俯仰力矩M_z（绕轴z_t）。

气动力矩也可以通过力矩系数来表达。对于飞机型式的飞行器，写成

$$
\left.\begin{aligned}
M_x &= m_x \frac{1}{2} \rho u^2 S l \\
M_y &= m_y \frac{1}{2} \rho u^2 S l \\
M_z &= m_z \frac{1}{2} \rho u^2 S b_A
\end{aligned}\right\} \tag{2-22}
$$

其中 l 为机翼展长，b_A为机翼平均气动弦；m_x、m_y、m_z分别称为滚转、偏航和俯仰力矩系数。当飞行器外形一定、且质心位置一定时，有

$$
\left.\begin{aligned}
m_x &= m_x(M, \beta, \delta_x, \delta_y, \omega_x, \omega_y, \alpha) \\
m_y &= m_y(M, \beta, \delta_y, \delta_x, \omega_y, \omega_x, \alpha; \dot{\beta}) \\
m_z &= m_z(M, \alpha, \delta_z, \omega_z, \dot{\alpha})
\end{aligned}\right\} \tag{2-23}
$$

对于轴对称型式的飞行器(例如有“+”形或“×”型翼的战术导弹，无翼的弹道式导弹)，最好把M_y和M_z表达式中的参考长度统一起来。

式（2-19）和（2-23）式所代表的关系式通常由风洞试验或理论计算得到，以气动曲线或表格的形式给出。对于除M数和Re数以外的其它参数，在一定范围内可以表示成线性函数的形式，例如

$$
m_z = m_{z0} + \frac{\partial m_z}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial m_z}{\partial \delta_z}\delta_z + \frac{\partial m_z}{\partial \omega_z}\omega_z + \frac{\partial m_z}{\partial \dot{\alpha}}\dot{\alpha}
$$

其中的m_{z0}和各个偏导数都是M数的非线性函数。

这里说明一下操纵面偏角的意义（见图2-7）。δ_x是副翼偏转角。按规定，当左副翼上偏、右副翼下偏时，δ_x为正。考虑到副翼的差动，δ_x的绝对值为左、右副翼偏角的绝对值的平均值。副翼偏转的主要目的是产生滚转力矩：正的δ_x产生负的m_x，但附带也引起小量的偏航力矩m_y。δ_y是方向舵偏转角。当方向舵后缘向右偏时，δ_y为正。方向舵偏转的主要目的是产生偏航力矩，但也附带产生小量的滚转力矩。对于正常式飞行器（即方向舵在重心之

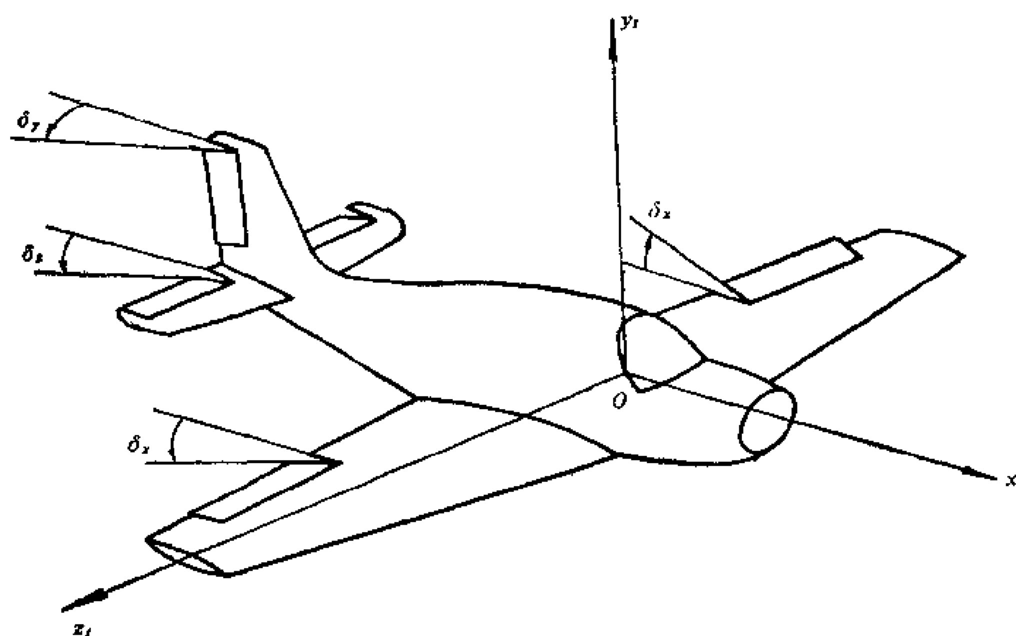


图2-7 操纵面偏角的定义

后），正的δ_y产生负的m_y；而对于鸭式飞行器（即方向舵在重心之前），正的δ_y则产生正的m_y。δ_z是升降舵偏转角。当它的后缘向下偏时，δ_z为正。升降舵偏转的主要目的是产生俯仰力矩。对于正常式，正的δ_z产生负的m_z；对于鸭式，正的δ_z产生的正的m_z。

3-3 重力G

重力的数值为

$$G = mg \tag{2-24}$$

其中m为飞行器的质量，g为重力加速度。重力的方向为铅垂向下，即沿地面轴y_d的负向。因此，写出重力的分量：

$$\begin{pmatrix} G_{xd} \\ G_{yd} \\ G_{zd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2-25}$$

显然，重力对飞行器质心之矩等于零。

当高度范围不大时，可以把重力加速度g当作常数。当高度范围很大时，应考虑g随高度的变化。

§ 4 飞行器质心移动的动力学方程

飞行器质心移动的动力学方程的一般形式是式（1-37）。在其中取不同的活动坐标系，就得到不同形式的方程。

4-1 在航迹坐标系中的质心动力学方程

现在取航迹坐标系作为方程（1-37）中的活动坐标系。在此坐标系中飞行速度的分量为

$$\begin{pmatrix} v_{xh} \\ v_{yh} \\ v_{zh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2-26}$$

由图2-2可见，航迹坐标系S_h的转动角速度$\boldsymbol{\omega}_h$有两个分量：沿轴y_d的$\dot{\psi}_s$和沿轴z_h的$\dot{\theta}$。因此，$\boldsymbol{\omega}_h$在S_h中的三个分量为：

$$\begin{pmatrix} \omega_{h\cdot xh} \\ \omega_{h\cdot yh} \\ \omega_{h\cdot zh} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_d^h \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_s \sin\theta \\ \dot{\psi}_s \cos\theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{2-27}$$

把式（2-26）和（2-27）代入到一般公式（1-37），且考虑作用力$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{G}$的分量表达式（2-14）、（2-17）和（2-25），得出

$$m\left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\psi}_s \sin\theta \\ \dot{\psi}_s \cos\theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}^{\times} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \mathbf{B}_q^h \mathbf{B}_t^q \begin{pmatrix} P\cos\varphi_p \\ P\sin\varphi_p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{B}_q^h \begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{B}_d^h \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2-28}$$

把$\mathbf{B}_t^h$、$\mathbf{B}_q^h$（无风情况）和$\mathbf{B}_d^h$的表达式（2-6）、（2-10）和（2-4）代入上式，展开后，就得到在无风情况下在航迹坐标系中建立的飞行器质心动力学方程如下：

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= P\cos(\alpha+\varphi_p)\cos\beta - Q - mg\sin\theta \\
mv\frac{d\theta}{dt} &= P[\cos(\alpha+\varphi_p)\sin\beta\sin\gamma_s + \sin(\alpha+\varphi_p)\cos\gamma_s] \\
&\quad + Y\cos\gamma_s - Z\sin\gamma_s - mg\cos\theta \\
-mv\cos\theta\frac{d\varphi_s}{dt} &= P[-\cos(\alpha+\varphi_p)\sin\beta\cos\gamma_s + \sin(\alpha+\varphi_p)\sin\gamma_s] + \\
&\quad + Y\sin\gamma_s + Z\cos Y_s
\end{aligned}\right\} \tag{2-29}
$$

至于在有风情况下，由于变换矩阵$\mathbf{B}_q^h$极为复杂[见式(2-9)]，故得到的运动方程也将复杂不堪，此处从略。

4.2 在机体坐标系中的质心动力学方程

对地速度 $\mathbf{v}$ 在机体坐标系中的分量写成v_{xt}、v_{yt}、v_{zt}，机体坐标系 S_t 的（即飞机本身的）旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$，在机体坐标系中的分量为 $\omega_{t\cdot xt}$、$\omega_{t\cdot yt}$、$\omega_{t\cdot zt}$，但按照习惯简写成ω_x、ω_y、ω_z。

在一般公式（1-37）中，取机体坐标系作为活动坐标系，则写出

$$
m\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_{xt} \\ v_{yt} \\ v_{zt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}^{\times} \begin{pmatrix} v_{xt} \\ v_{yt} \\ v_{zt} \end{pmatrix}\right) =
$$

$$
= \begin{pmatrix} P\cos\varphi_p \\ P\sin\varphi_p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{B}_q^t \begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{B}_d^t \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2-30}
$$

展开后，得到在机体坐标系中建立的飞行器质心动力学方程

$$
\left.\begin{aligned}
m\left(\frac{dv_{xt}}{dt} + \omega_y v_{zt} - \omega_z v_{yt}\right) &= P\cos\varphi_p - Q\cos\alpha\cos\beta + \\
&\quad + Y\sin\alpha - Z\cos\alpha\sin\beta - mg\sin\vartheta \\
m\left(\frac{dv_{yt}}{dt} + \omega_z v_{xt} - \omega_x v_{zt}\right) &= P\sin\varphi_p + Q\sin\alpha\cos\beta + \\
&\quad + Y\cos\alpha + Z\sin\alpha\sin\beta - mg\cos\vartheta\cos\gamma \\
m\left(\frac{dv_{zt}}{dt} + \omega_x v_{yt} - \omega_y v_{xt}\right) &= -Q\sin\beta + Z\cos\beta + \\
&\quad + mg\cos\vartheta\sin\gamma
\end{aligned}\right\} \tag{2-31}
$$

无论有风或无风，这组方程都是适用的。

在某些特殊情况下，可以作如下简化：设无风且α和β不大，则可以取

$$
\begin{aligned}
v_{xt} &= v\cos\alpha\cos\beta \approx v \\
v_{yt} &= -v\sin\alpha\cos\beta \approx -v\alpha \\
v_{zt} &= v\sin\beta \approx v\beta
\end{aligned}
$$

此外，还假设速度变化很小，可以取

$$
v \approx \text{const}
$$

于是只要取式（2-31）的第二、第三个方程：

$$\left.\begin{aligned} mv\left(-\frac{d\alpha}{dt}+\omega_z-\omega_x\beta\right)&=P\sin\varphi_p+Y_t-mg\cos\vartheta\cos\gamma \\ mv\left(\frac{d\beta}{dt}-\omega_x\alpha-\omega_y\right)&=Z_t+mg\cos\vartheta\sin\gamma \end{aligned}\right\}$$

式中Y_t、Z_t是气动力**R**在轴y_t、z_t上的分量。整理后得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt}&=\omega_z-\beta\omega_x-\frac{P\sin\varphi_p+Y_t}{mv}+\frac{g}{v}\cos\vartheta\cos\gamma \\ \frac{d\beta}{dt}&=\omega_y+\alpha\omega_x+\frac{Z_t}{mv}+\frac{g}{v}\cos\vartheta\sin\gamma \end{aligned}\right\} \tag{2-32}$$

这组方程与后面的转动动力学方程（2-41）及运动学方程（2-46）可以联立求解，得到α、β、γ、ϑ的变化，但不能求出θ和高度y_d。这样的方程只适用于初始θ不大，且飞行时间不长的情况，例如飞机的横滚机动飞行。

4-3 在地面坐标系中的质心动力学方程

对地速度**v**在地面坐标系S_d中的分量为v_{xd}、v_{yd}、v_{zd}。该坐标系的旋转角速度$\omega_d=0$。于是，方程（1-37）成为

$$m\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{pmatrix}=\mathbf{B}_t^d\begin{pmatrix} P\cos\varphi_p \\ P\sin\varphi_p \\ 0 \end{pmatrix}+\mathbf{B}_q^d\begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2-33}$$

展开时，变换矩阵$\mathbf{B}_q^d$取式（2-13）的形式。于是得到无风条件下在地面坐标系中建立的质心动力学方程

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_{xd}}{dt}&=P[\cos\varphi_p\cos\psi\cos\vartheta+\sin\varphi_p(\sin\psi\sin\gamma-\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma)] \\ &\quad -Q\cos\psi_s\cos\theta+Y(\sin\psi_s\sin\gamma_s-\cos\psi_s\sin\theta\cos\gamma_s)+ \\ &\quad +Z(\sin\psi_s\cos\gamma_s+\cos\psi_s\sin\theta\sin\gamma_s) \\ m\frac{dv_{yd}}{dt}&=P[\cos\varphi_p\sin\vartheta+\sin\varphi_p\cos\vartheta\cos\gamma]-Q\sin\theta+ \\ &\quad +Y\cos\theta\cos\gamma_s-Z\cos\theta\sin\gamma_s-mg \\ m\frac{dv_{zd}}{dt}&=P[-\cos\varphi_p\sin\psi\cos\vartheta+\sin\varphi_p(\cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma)]+ \\ &\quad +Q\sin\psi_s\cos\theta+Y(\cos\psi_s\sin\gamma_s+\sin\psi_s\sin\theta\cos\gamma_s)+ \\ &\quad +Z(\cos\psi_s\cos\gamma_s-\sin\psi_s\sin\theta\sin\gamma_s) \end{aligned}\right\} \tag{2-34}$$

在有风条件下，矩阵B_q^d非常复杂[见式（2-11）]，所以得到的方程也非常复杂，这里不再推导。

4-4 在气流坐标系中的质心动力学方程

在无风情况下，对地速度**v**在气流坐标系S_q中的分量为

$$\begin{pmatrix} v_{xq} \\ v_{yq} \\ v_{zq} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2-35}$$

气流坐标系S_q的旋转角速度$\boldsymbol{\omega}_q$等于航迹坐标系S_h的旋转角速度$\boldsymbol{\omega}_h$加上S_q相对于S_h的旋转角速度$\boldsymbol{\omega}_{q-h}$。前者由沿轴$y_d$的$\dot{\psi}_s$和沿轴$z_h$的$\dot{\theta}$组成（见图2-2），后者是沿轴$x_q$的$\dot{\gamma}_s$（见图2-4）。因而

$$\begin{pmatrix}\omega_{q\cdot xq}\\ \omega_{q\cdot yq}\\ \omega_{q\cdot zq}\end{pmatrix} = \mathbf{B}^q_d\begin{pmatrix}0\\ \dot{\psi}_s\\ 0\end{pmatrix} + \mathbf{B}^q_h\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{\gamma}_s\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\dot{\psi}_s + \dot{\gamma}_s\\ \cos\theta\cos\gamma_s\dot{\psi}_s + \sin\gamma_s\dot{\theta}\\ -\cos\theta\sin\gamma_s\dot{\psi}_s + \cos\gamma_s\dot{\theta}\end{pmatrix} \tag{2-36}$$

应用一般公式（1-37），写出

$$m\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}v\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin\theta\dot{\psi}_s + \dot{\gamma}_s\\ \cos\theta\cos\gamma_s\dot{\psi}_s + \sin\gamma_s\dot{\theta}\\ -\cos\theta\sin\gamma_s\dot{\psi}_s + \cos\gamma_s\dot{\theta}\end{pmatrix}^{\times}\begin{pmatrix}v\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathbf{B}^q_t\begin{pmatrix}P\cos\varphi_p\\ P\sin\varphi_p\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-Q\\ Y\\ Z\end{pmatrix} + \mathbf{B}^q_d\begin{pmatrix}0\\ mg\\ 0\end{pmatrix} \tag{2-37}$$

把此式展开，得到无风条件下在气流坐标系中建立的飞行器质心动力学方程

$$\begin{aligned}
&m\frac{dv}{dt} = P\cos(\alpha+\varphi_p)\cos\beta - Q - mg\sin\theta\\
&mv\left(-\cos\theta\sin\gamma_s\frac{d\psi_s}{dt} + \cos\gamma_s\frac{d\theta}{dt}\right) = P\sin(\alpha+\varphi_p) +\\
&\qquad\qquad + Y - mg\cos\theta\cos\gamma_s\\
&mv\left(-\cos\theta\cos\gamma_s\frac{d\psi_s}{dt} - \sin\gamma_s\frac{d\theta}{dt}\right) = -P\cos(\alpha+\varphi_p)\sin\beta +\\
&\qquad\qquad + Z + mg\cos\theta\sin\gamma_s
\end{aligned} \tag{2-38}$$

某些文献（例如[4]）采用这样形式的方程。但这组方程还不能直接解算，必须首先把第二、三方程作为代数方程解出$d\psi_s/dt$和$d\theta/dt$。而解出的结果与在航迹坐标系中建立的方程（2-29）完全一样。所以，这样做法倒不如直接在航迹坐标系中建立方程。

§5 飞行器绕质心轉动的动力学方程

第一章§4得到的方程（1-43）就是最一般情况下作为绝对刚体的飞行器绕质心转动的动力学方程。不过其右边的力矩M_x、M_y、M_z应改写为$\sum M_x$、$\sum M_y$、$\sum M_z$，它们表示气动力矩与推力力矩的总和

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx}\left(\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y\right) -$$
$$- I_{xy}\left(\frac{d\omega_y}{dt} - \omega_z\omega_x\right) = M_x + M_{xp}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy}\left(\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z\right) - \\
& \qquad - I_{yz}\left(\frac{d\omega_z}{dt} - \omega_x\omega_y\right) = M_y + M_{yp} \\
& I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz}\left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z\omega_x\right) - \\
& \qquad I_{zx}\left(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y\omega_z\right) = M_z + M_{zp}
\end{aligned}
\right\} \tag{2-39}
$$

其中的ω_x、ω_y、ω_z是飞行器转动角速度ω（亦即机体坐标系S_t的转动角速度）在S_t中的分量；I_x、I_y、I_z和I_{xy}、I_{yz}、I_{zx}是飞行器对S_t的转动惯量和惯性积；M_x、M_y、M_z和M_{xp}、M_{yp}、M_{zp}分别是气动力矩和推力力矩在S_t中的分量。为了书写方便起见，按习惯省略了下标t。

绝大多数飞行器具有纵对称平面Ox_ty_t，因而惯性积$I_{yz}=I_{zx}=0$，于是转动动力学方程简化成为

$$
\left.
\begin{aligned}
& I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z + I_{xy}\left(\omega_z\omega_x - \frac{d\omega_y}{dt}\right) = \sum M_x \\
& I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x - I_{xy}\left(\omega_y\omega_z + \frac{d\omega_x}{dt}\right) = \sum M_y \\
& I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) = \sum M_z
\end{aligned}
\right\} \tag{2-40}
$$

为了便于计算，要把上式化成解出的形式

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{1}{I_xI_y - I_{xy}^2}\left[I_y\sum M_x + I_{xy}\sum M_y - I_{xy}(I_x + I_y - I_z)\omega_z\omega_x + \right. \\
&\quad \left. + (I_y^2 + I_{xy}^2 - I_yI_z)\omega_y\omega_z\right] \\
\frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{1}{I_xI_y - I_{xy}^2}\left[I_x\sum M_y + I_{xy}\sum M_x - I_{xy}(I_z - I_x - I_y)\omega_y\omega_z + \right. \\
&\quad \left. + (I_xI_z - I_{xy}^2 - I_x^2)\omega_z\omega_x\right] \\
\frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{1}{I_z}\left[\sum M_z - (I_y - I_x)\omega_x\omega_y + I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2)\right]
\end{aligned}
\right\} \tag{2-41}
$$

轴对称式飞行器具有两个对称平面，不仅$I_{yz}=I_{zx}=0$，而且$I_{xy}=0$，$I_y=I_z$，所以转动动力学方程更为简单

$$
\left.
\begin{aligned}
& I_x \frac{d\omega_x}{dt} = \sum M_x \\
& I \frac{d\omega_y}{dt} - (I - I_x)\omega_z\omega_x = \sum M_y \\
& I \frac{d\omega_z}{dt} + (I - I_x)\omega_x\omega_y = \sum M_z
\end{aligned}
\right\} \tag{2-42}
$$

其中$I=I_y=I_z$。

当考虑发动机转子的陀螺效应时，方程(2-40)要稍加修正。发动机转子轴往往近似平行于机体纵轴x_t，因而转子的动量矩只有分量$H_{rx}=J_r\omega_r$，这里J_r是转子的等效转动惯量，ω_r是转速；而$H_{ry}=H_{rz}=0$。而且可以认为ω_r不变化，故$dH_{rx}/dt=0$。这时，根据第一章导出的一般公式（1-45）可以断定，方程（2-40）的第一式不变，第二式左边添加一项$+J_r\omega_r\omega_z$，第三式左边添加一项$-J_r\omega_r\omega_y$。

§6 运动学方程及几何关系式

除了前两节建立的动力学方程以外，各运动参数之间还存在着一些运动学关系和几何关系，这些也是为求解运动方程所必不可少的。下面就来建立这些关系式。

6-1 速度分量的坐标变换

把速度分量由航迹坐标系变换到地面坐标系，可利用矩阵$\mathbf{B}_h^d$

$$\begin{pmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_h^d \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_D}{dt} &= v\cos\theta\cos\psi_s \\ \frac{dy_D}{dt} &= v\sin\theta \\ \frac{dz_D}{dt} &= -v\cos\theta\sin\psi_s \end{aligned}\right\} \tag{2-43}$$

在这里考虑了

$$\frac{dx_D}{dt} = v_{xD} = v_{xd}$$

等等。

把速度分量由机体坐标系变换到地面坐标系，要利用矩阵$\mathbf{B}_t^d$

$$\begin{pmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_t^d \begin{pmatrix} v_{xt} \\ v_{yt} \\ v_{zt} \end{pmatrix}$$

结果是

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_D}{dt} &= v_{xt}\cos\vartheta\cos\psi + v_{yt}(-\cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi + \sin\gamma\sin\psi) + \\ &\quad + v_{zt}(\sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi) \\ \frac{dy_D}{dt} &= v_{xt}\sin\vartheta + v_{yt}\cos\gamma\cos\vartheta - v_{zt}\sin\gamma\cos\vartheta \\ \frac{dz_D}{dt} &= -v_{xt}\cos\vartheta\sin\psi + v_{yt}(\cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi + \sin\gamma\cos\psi) + \\ &\quad + v_{zt}(-\sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi + \cos\gamma\cos\psi) \end{aligned}\right\} \tag{2-44}$$

6-2 角速度之间的关系

飞行器绕质心转动的角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$，在机体坐标系中有三个分量ω_x、ω_y、ω_z。另一方面，根据机体坐标系的形成过程（见图2-1），$\boldsymbol{\omega}$可分解成：沿轴y_d的$\dot{\psi}$、沿轴z'的$\dot{\vartheta}$和沿轴x_t的$\dot{\gamma}$。其中的$\dot{\vartheta}$又可分解成沿轴z_d的$\dot{\vartheta}\cos\psi$和沿轴x_d的$\dot{\vartheta}\sin\psi$。因此有

$$\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\mathbf{B}_d^t\begin{pmatrix}\dot{\vartheta}\sin\psi\\ \dot{\psi}\\ \dot{\vartheta}\cos\psi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

展开上式，得到

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\dot{\gamma}+\sin\vartheta\dot{\psi}\\ \omega_y&=\cos\vartheta\cos\gamma\dot{\psi}+\sin\gamma\dot{\vartheta}\\ \omega_z&=-\cos\vartheta\sin\gamma\dot{\psi}+\cos\gamma\dot{\vartheta}\end{aligned}\right\}\tag{2-45}$$

因为ω_x、ω_y、ω_z可由微分方程（2-41）解算出来，故未知量$\dot{\gamma}$、$\dot{\psi}$、$\dot{\vartheta}$可以从上式（作为代数方程）解出，结果为

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}&=\omega_x-\mathrm{tg}\vartheta(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma)\\ \frac{d\psi}{dt}&=\frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma)\\ \frac{d\vartheta}{dt}&=\omega_y\sin\gamma+\omega_z\cos\gamma\end{aligned}\tag{2-46}$$

6-3 几何关系式

在无风情况下，在八个角度（ϑ、ψ、γ、α、β、θ、ψ_s、γ_s）中只有五个独立的变量。当知道其中的五个时，可以通过几何关系求出其余三个。

为了找出角度之间的几何关系，可以利用坐标变换矩阵的关系，因为变换矩阵$\mathbf{B}_q^t$包含α和β，$\mathbf{B}_d^t$包含ψ、ϑ和γ，$\mathbf{B}_q^d$包含ψ_s、θ和γ_s，以及$\mathbf{B}_h^q$包含γ_s，$\mathbf{B}_h^d$包含ψ_s和θ。

根据坐标变换的传递公式（1-17），有

$$\mathbf{B}_q^t\mathbf{B}_h^q=\mathbf{B}_d^t\mathbf{B}_h^d\tag{2-47}$$

其中的$\mathbf{B}_q^t$、$\mathbf{B}_h^q$、$\mathbf{B}_d^t$和$\mathbf{B}_h^d$分别由式（2-6）、(2-10)、(2-2)和(2-4)给出。把上式展开，并且令两边的第3行第1列元素相等，得到

$$\sin\beta=[\sin\gamma\sin\vartheta\cos(\psi-\psi_s)+\cos\gamma\sin(\psi-\psi_s)]\cos\theta-\sin\gamma\cos\vartheta\sin\theta\tag{2-48}$$

然后，令等式两边的第2行第1列元素相等，得到

$$\sin\alpha=\{[\cos\gamma\sin\vartheta\cos(\psi-\psi_s)-\sin\gamma\sin(\psi-\psi_s)]\cos\theta-\cos\gamma\cos\vartheta\sin\theta\}/\cos\beta\tag{2-49}$$

同样地，有

$$\mathbf{B}_q^d=\mathbf{B}_t^d\mathbf{B}_q^t\tag{2-50}$$

令两边的第2行第3列元素相等，得到

$$\sin\gamma_s=(\sin\vartheta\cos\alpha\sin\beta-\cos\gamma\cos\vartheta\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\cos\vartheta\cos\beta)/\cos\theta\tag{2-51}$$

当已知ϑ、ψ、γ、θ、ψ_s时，利用公式（2-48）、(2-49)、(2-51)，可以先后求出β、α、γ_s。

令式（2-50）两边的第2行第1列元素相等，得到

$$\sin\theta=\sin\vartheta\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma\cos\vartheta\sin\alpha\cos\beta-\sin\gamma\cos\vartheta\sin\beta \tag{2-52}$$

令等式两边第2行第2列的元素相等，得到

$$\cos\gamma_s=(\sin\vartheta\sin\alpha+\cos\gamma\cos\vartheta\cos\alpha)/\cos\theta \tag{2-53}$$

令两边第3行第1列的元素相等，得到

$$\sin(\psi_s-\psi)=(\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta-\cos\gamma\sin\beta)/\cos\theta \tag{2-54}$$

当已知ϑ、ψ、γ、α、β时，利用式（2-52）、(2-53)、(2-54），可以先后求出θ、γ_s、ψ_s。但是，当γ_s值很小时，利用余弦值公式（2-53）会产生较大的计算误差，这时最好用公式（2-51）代替它。

以后在§7中将说明以上关系式如何与其它方程式配合使用。

6-4 其它关系式

1. 由机体坐标系中的速度分量求α和β

在无风情况下有

$$\begin{pmatrix} v_{xt} \\ v_{yt} \\ v_{zt} \end{pmatrix}=\mathbf{B}_q^t\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=v\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

由此得到

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha&=-\frac{v_{yt}}{v_{xt}} \\ \sin\beta&=\frac{v_{zt}}{v} \\ v&=\sqrt{v_{xt}^2+v_{yt}^2+v_{zt}^2} \end{aligned}\right\} \tag{2-55}$$

2. 由地面坐标系中速度分量求θ和ψ_s

由于

$$\begin{pmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{pmatrix}=\mathbf{B}_h^d\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=v\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi_s \\ \sin\theta \\ -\cos\theta\sin\psi_s \end{pmatrix}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi_s&=-\frac{v_{zd}}{v_{xd}} \\ \sin\theta&=\frac{v_{yd}}{v} \end{aligned}\right\} \tag{2-56}$$

3. $\dot\alpha$和$\dot\beta$的计算

在确定气动力矩时，需要$\dot\alpha$和$\dot\beta$的值。虽然可以用数值微分法计算导数$\dot\alpha$、$\dot\beta$，但这样计算的结果误差较大，跳动厉害，而且初始值不易计算。所以希望有直接计算的公式。

机体系$Ox_ty_tz_t$相对于气流系$Ox_qy_qz_q$的转动角速度可以表示成$\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_q$（注意此处$\boldsymbol{\omega}$实际上是$\boldsymbol{\omega}_t$的简写形式），由本章2-3中的论述并参看图2-3，可见上述相对角速度由沿轴y_q的$\dot\beta$和沿轴z_t的$\dot\alpha$组成。将上述关系投影到气流坐标系中，就是

$$\mathbf{B}_t^q\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\omega_{q\cdot xq}\\ \omega_{q\cdot yq}\\ \omega_{q\cdot zq}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dot\beta\\ 0\end{pmatrix}-\mathbf{B}_t^q\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot\alpha\end{pmatrix}$$

移项

$$\mathbf{B}_t^q\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z-\dot\alpha\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ \dot\beta\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_{q\cdot xq}\\ \omega_{q\cdot yq}\\ \omega_{q\cdot zq}\end{pmatrix}$$

把$\mathbf{B}_t^q$的公式（2-6）和ω_q分量的公式（2-36）代入上式，得到

$$\begin{pmatrix}\omega_x\cos\alpha\cos\beta-\omega_y\sin\alpha\cos\beta+(\omega_z-\dot\alpha)\sin\beta\\ \omega_x\sin\alpha+\omega_y\cos\alpha-\dot\beta\\ -\omega_x\cos\alpha\sin\beta+\omega_y\sin\alpha\sin\beta+(\omega_z-\dot\alpha)\cos\beta\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\dot\psi_s\sin\theta+\dot\gamma_s\\ \dot\psi_s\cos\theta\cos\gamma_s+\dot\theta\sin\gamma_s\\ -\dot\psi_s\cos\theta\sin\gamma_s+\dot\theta\cos\gamma_s\end{pmatrix}$$

令上式左右两边的第2和第3元素彼此相等，经过整理，就得到$\dot\alpha$和$\dot\beta$的计算公式

$$\left.\begin{aligned}\dot\beta&=\omega_x\sin\alpha+\omega_y\cos\alpha-\dot\psi_s\cos\theta\cos\gamma_s-\dot\theta\sin\gamma_s\\ \dot\alpha&=\omega_z-\frac{1}{\cos\beta}(\omega_x\cos\alpha\sin\beta-\omega_y\sin\alpha\sin\beta-\\ &\quad-\dot\psi_s\cos\theta\sin\gamma_s+\dot\theta\cos\gamma_s)\end{aligned}\right\}\tag{2-57}$$

通常，对$\dot\alpha$和$\dot\beta$的计算精度要求不高，而且α和β不大，所以可以得到较简单的公式

$$\left.\begin{aligned}\dot\beta&=\omega_x\alpha+\omega_y-\dot\psi_s\cos\theta\cos\gamma_s-\dot\theta\sin\gamma_s\\ \dot\alpha&=\omega_z-\omega_x\beta+\dot\psi_s\cos\theta\sin\gamma_s-\dot\theta\cos\gamma_s\end{aligned}\right\}\tag{2-57'}$$

公式（2-57）或（2-57′）适合于与航迹系中的质心运动方程相配合。

若质心运动方程是在机体系中的，则采用以下的公式（2-58）或（2-58′）。取方程（2-55），对时间求导

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\dot\alpha=\frac{-v_{xt}\dot v_{yt}+v_{yt}\dot v_{xt}}{v_{xt}^2}$$

$$\cos\beta\,\dot\beta=\frac{v\dot v_{zt}-v_{zt}\dot v}{v^2}$$

考虑到

$$2v\dot v=2v_{xt}\dot v_{xt}+2v_{yt}\dot v_{yt}+2v_{zt}\dot v_{zt}$$

最后得到

$$\left.\begin{aligned}\dot\alpha&=\cos^2\alpha\frac{-v_{xt}\dot v_{yt}+v_{yt}\dot v_{xt}}{v_{xt}^2}\\ \dot\beta&=\frac{1}{\cos\beta}\cdot\frac{v\dot v_{zt}-[v_{zt}(v_{xt}\dot v_{xt}+v_{yt}\dot v_{yt}+v_{zt}\dot v_{zt})/v]}{v^2}\end{aligned}\right\}\tag{2-58}$$

当α和β不大时，$v\approx v_{xt}$，所以有近似公式

$$\left.\begin{aligned}\dot\alpha&=(-v_{xt}\dot v_{yt}+v_{yt}\dot v_{xt})/v_{xt}^2\\ \dot\beta&=(v_{xt}\dot v_{zt}-v_{zt}\dot v_{xt})/v_{xt}^2\end{aligned}\right\}\tag{2-58'}$$

§ 7 关于运动方程的一般討論

7-1 方程的体系

以上在"平面大地"和"静止大气"的条件下建立了飞行器的一般运动方程。

飞行器质心的动力学方程（力方程）可以分别列写在四种不同的坐标系中，即航迹系、机体系、地面系、气流系。已经指出，在气流坐标系中列写的方程（2-38）经过周折后仍归结为航迹系中的方程。在地面坐标系中建立的方程（2-34）特别复杂，而且不便于线化，所以通常不采用。实践经验表明，行之有效的质心运动方程是建立在航迹坐标系中的式(2-29)和机体坐标系中的式（2-31）。

至于飞行器绕质心转动的动力学方程（力矩方程），则只有唯一的形式，就是在机体坐标系中建立的方程（2-41）。

因此，飞行器运动方程有两套不同的体系。第一套体系是：力方程在航迹坐标系中写出，力矩方程在机体坐标系中写出。它称为"航迹-机体体系"，缩写为HT。第二套体系是：力方程和力矩方程都在机体坐标系中建立。它叫做"机体-机体体系"，缩写为TT。这两套体系中所需要的运动学关系式和几何关系式也各不相同。表2-1列出了这两套方程体系的性质及组成该体系的各方程的号码。

这两套方程体系各有其优点，应根据实际问题的具体条件来选取。

表2-1　方程体系的特性

方程体系	力方程的参考坐标系	力矩方程的参考坐标系	方程的号码
航迹-机体（HT）	航迹坐标系	机体坐标系	(2-29),(2-41),(2-43),(2-46),(2-48),(2-49),(2-51),(2-57)
机体-机体（TT）	机体坐标系	机体坐标系	(2-31),(2-41),(2-44),(2-46),(2-55),(2-58)

7-2 运动方程的方块图

为了形象地说明在求解运动方程的过程中各运动参数的来龙去脉，画了两个方块图：图2-8（对于HT体系）和图 2-9(对于TT体系)。在这些方程中，操纵面偏转角δ_x(副翼)、δ_y（方向舵）、δ_z（升降舵）和油门开度δ_p是作为已知参数。我们看到，除了上述四个变量以外，所有方块左边的变量都在方块右边出现，这说明，这些方程联立起来是封闭的，是可以求解的。

可见，飞行器的运动是由一些非线性一阶微分方程以及代数方程所描述的。为了得到飞行器的运动规律，必须用数值法求解这些微分方程，并辅之以一些代数运算。求解的方法将在第六章中详细讨论。

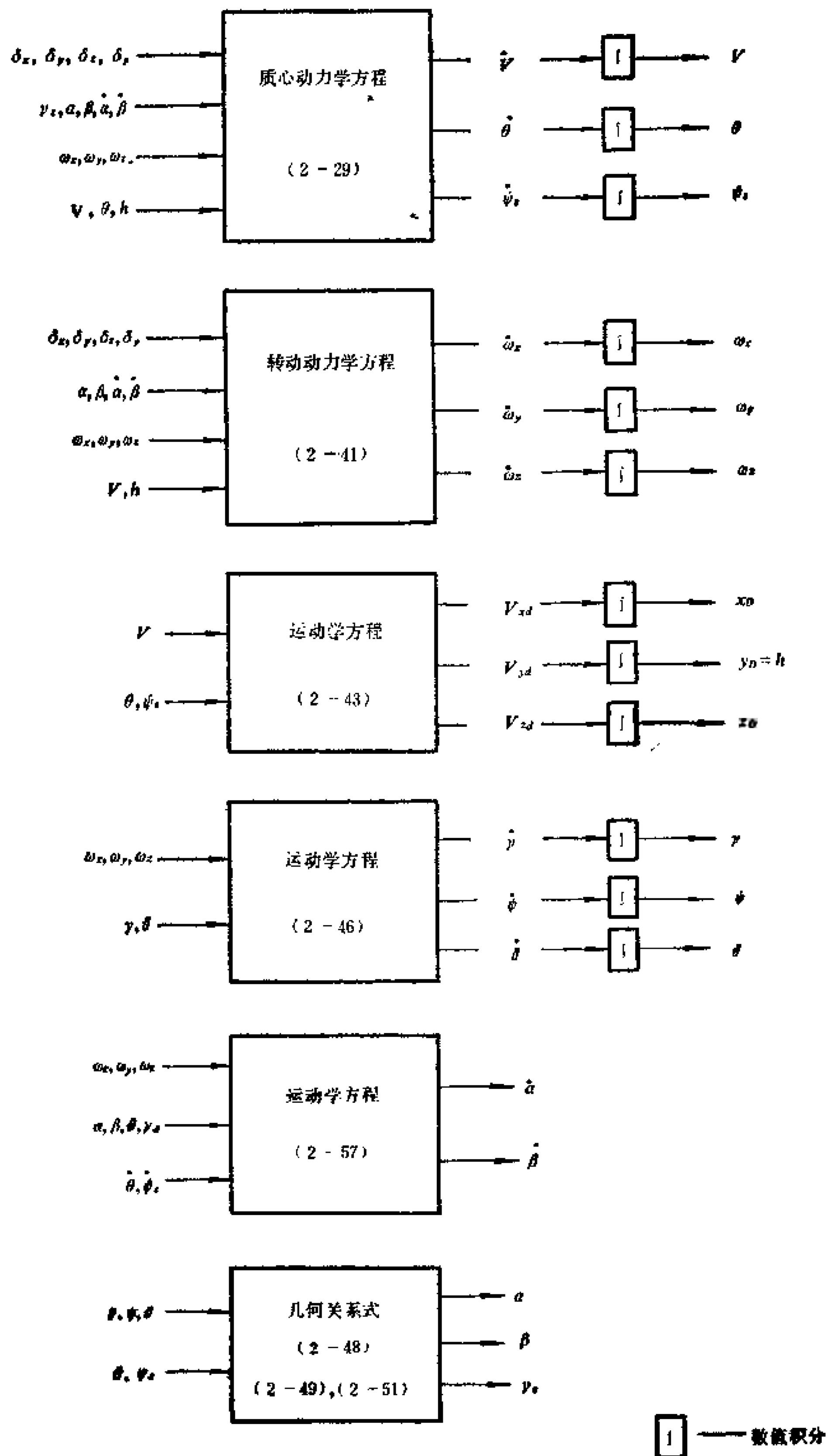


图2-8 HT体系的运动方程方块图

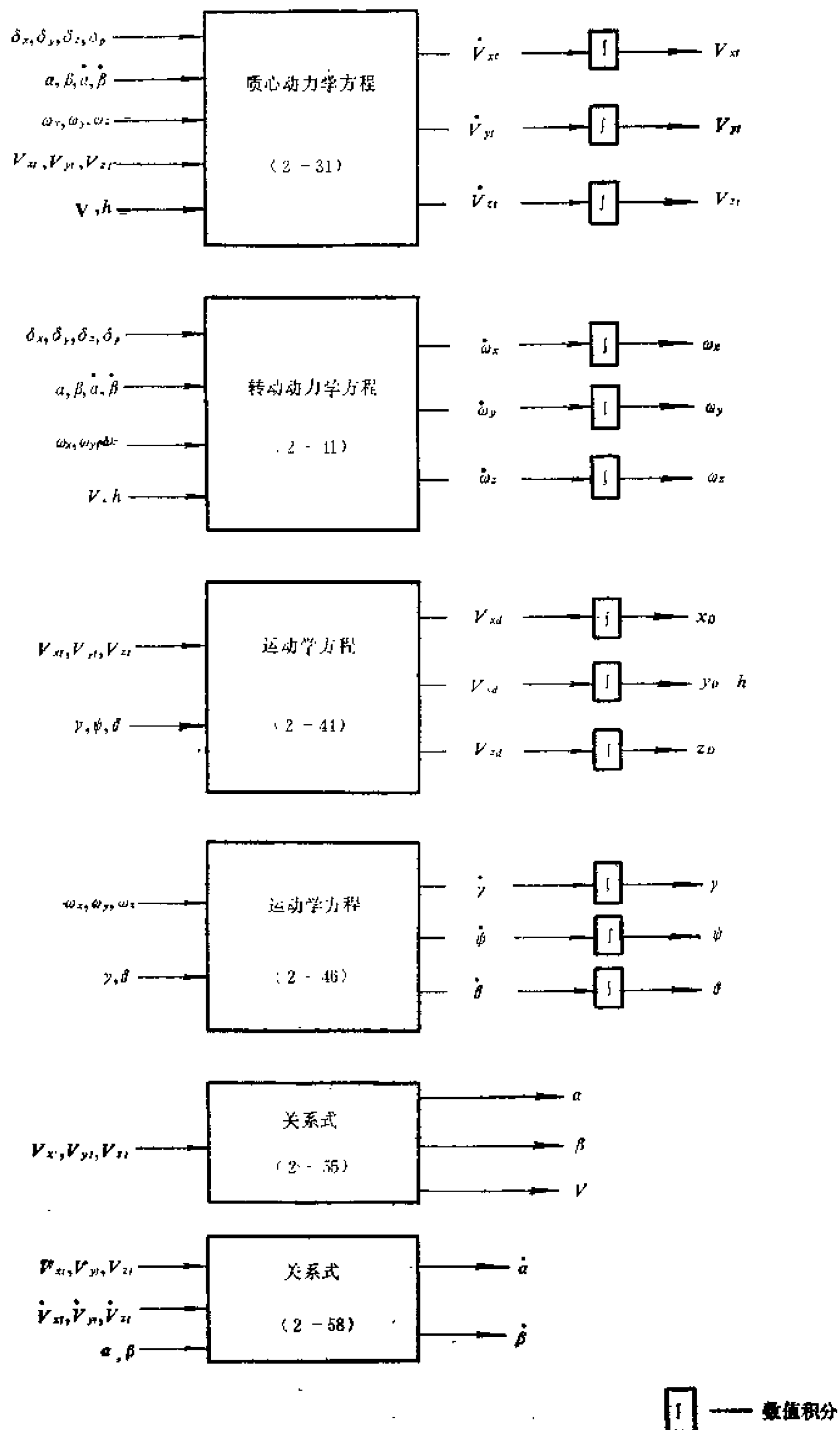


图2-9 TT体系的运动方程方块图

7-3 特殊情况——铅垂平面内的对称飞行

前面列出的是最一般情况下的飞行器运动方程，即飞行器作空间运动的方程。在一些特殊情况下，运动方程大大简化。现在我们来研讨一种最重要、也最常见的特殊情况，即飞行器在铅垂平面内对称飞行的情况。在这种情况下，如果选取的地面坐标系的 $O_Dx_Dy_D$ 平面跟飞行平面是重合的，则飞行器的所有横侧参数，即 ψ、γ、ψ_s、γ_s、v_{zD}、β、z_D、ω_x、ω_y、δ_x、δ_y、Z、M_x、M_y 均等于零；同时，半机体坐标系、气流坐标系和航迹坐标系三者重合在一起。图2-10表示这时的坐标系和运动参数。

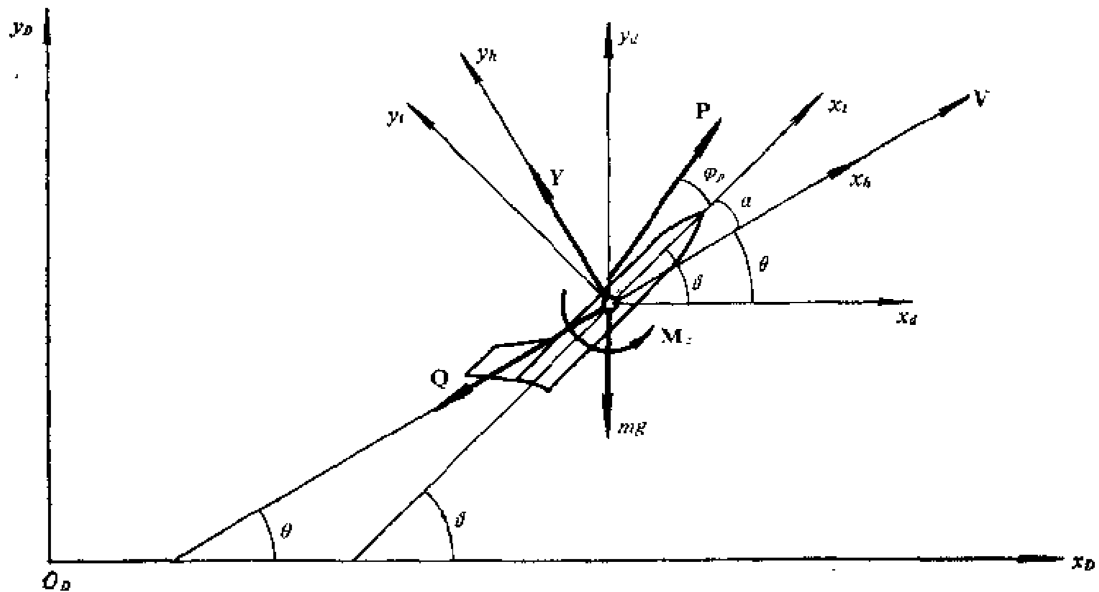


图2-10　在铅垂平面内的对称飞行情况

飞行器在铅垂平面内对称飞行的运动方程，不难由一般情况的运动方程简化而成，只要令所有横侧参数为零。

HT体系的运动方程为

$$
\left.
\begin{aligned}
& m\frac{dv}{dt}=P\cos(\alpha+\varphi_p)-Q-mg\sin\theta \\
& mv\frac{d\theta}{dt}=P\sin(\alpha+\varphi_p)+Y-mg\cos\theta \\
& I_z\frac{d\omega_z}{dt}=M_z-Pe_p \\
& \frac{dx_D}{dt}=v\cos\theta \\
& \frac{dy_D}{dt}=v\sin\theta \\
& \frac{d\vartheta}{dt}=\omega_z \\
& \alpha=\vartheta-\theta
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2\text{-}59)
$$

则体系的运动方程为

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{dv_{xt}}{dt} &= m\omega_z v_{yt} + P\cos\varphi_p - Q\cos\alpha + Y\sin\alpha - mg\sin\vartheta \\
m\frac{dv_{yt}}{dt} &= -m\omega_z v_{xt} + P\sin\varphi_p + Q\sin\alpha + Y\cos\alpha - mg\cos\vartheta \\
I_z\frac{d\omega_z}{dt} &= M_z - Pe_p \\
\frac{dx_D}{dt} &= v_{xt}\cos\vartheta - v_{yt}\sin\vartheta \\
\frac{dy_D}{dt} &= v_{xt}\sin\vartheta + v_{yt}\cos\vartheta \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \\
\mathrm{tg}\alpha &= -\frac{v_{yt}}{v_{xt}} \\
v &= \sqrt{v_{xt}^2 + v_{yt}^2} \\
\sin\theta &= \frac{v_{yd}}{v} \quad (v_{yd} = dy_D/dt)
\end{aligned}\right\} \tag{2-60}
$$

7-4　几点补充说明

1.　气动操纵面偏角和油门开度

本章7-2中指出，当操纵面偏角δ_x、δ_y、δ_z和油门开度δ_p为已知时，整个运动方程组成为封闭的，可以求解。但是，实际问题中，真正以操纵面偏角和油门开度为已知量的情况是少见的。往往给定了对飞行器运动的某些要求，根据这些要求反过来确定操纵面偏角和油门开度，同时确定其它运动变量。对飞行器运动的要求可能是，例如要求飞行器作水平直线飞行，或者以给定的过载或给定的滚转角作无侧滑的等速水平盘旋运动，或者按某种导引规律跟踪一个按已知规律运动的目标，等等。这些对运动的要求称为运动学约束，也可以写成方程式（参看[8]）。

2.　飞行器作为刚体和作为质点

完整的飞行器运动方程应包括质心运动方程和绕质心的转动方程，亦即把飞行器当作刚体看待。以上的方程组就是这样建立的。

但是在某些情况下，当仅要求计算飞行器的航迹，而不关心它的稳定性分析，并且知道它具有相当好的稳定性时，可以忽略飞行器的转动惯性而把转动动力学方程退化成力矩平衡方程。这就是把飞行器看作是可控制的质点。这样能使航迹的计算大大简化。

3.　飞行器的质量变化

在计算飞行器航迹时还应考虑到，飞行器的质量并不是不变的，这是由于：为了使发动机产生必要的推力，必须消耗燃料，因而飞行器的质量逐渐减小。燃料消耗率μ（即每秒钟消耗的燃料质量）取决于油门开度，或者说取决于推力、速度和高度。因此，在整个运动方程组中还应补充一个质量方程式

$$\frac{dm}{dt} = -\mu = -f(\delta_p) \tag{2-61}$$

或
$$\frac{dm}{dt} = -\mu = -f(P, v, h) \tag{2-61'}$$

具体的函数关系由发动机特性曲线给出。

但是在以下两种情况下不必写出质量方程式。第一，燃料消耗率μ不大，而且考虑的时间不长；第二，计算导弹的被动段的飞行（即发动机工作结束以后的飞行）。

7-5 四元数在飞行器运动方程中的应用

目前国外在计算和飞行模拟试验中已广泛地利用四元数（*quaternion*）代替Euler角，这方面的问题详见附录《四元数在飞行器运动方程中的应用》。

第三章 “旋转球形大地”情况下的飞行器运动方程

本章中，把大地看作是一个绕自身轴线作等速旋转（自转）的圆球，来建立飞行器的运动方程。对于超高速飞行器来说，这样考虑大地的曲率和旋转是必要的。

本章建立坐标系、定义运动参数和推导运动方程时，可以直接利用第二章的某些结果。为了节省篇幅，凡是与第二章相同的部分，本章就不重复叙述了。

在最后一节中讲述超高速飞行器的一个特殊类型——弹道式火箭或航天器运载火箭的运动方程。

推导运动方程时，仍认为大气相对于地球而言是静止的，因而飞行器相对于地球的速度（对地速度 **v**）与相对于大气的速度（对空速度 **u**）是一致的。当有必要考虑风的影响时，可参照第五章的方法推导有风时的运动方程。

§1 坐标系的定义

当把大地看作是旋转的球体时，研究飞行器的运动，需要以下几种坐标系。

1-1 地心坐标系

地心坐标系$O_e x_e y_e z_e$（见图3-1）固连于地球，跟着地球一起旋转。原点O_e在地球中心。轴y_e在赤道平面内，通过Greenwich子午线（即经度$\lambda=0$的子午线）。轴x_e也在赤道平面内，通过东经90°($\lambda=90°$)的子午线。轴z_e垂直于赤道平面(即沿地球轴)，指向南极。

1-2 浮动地球坐标系

浮动地球坐标系$Ox_d y_d z_d$（见图3-1）的原点O在飞行器质心。轴y_d沿当地铅垂线，指向上方。平面$x_d z_d$为当地水平平面，轴x_d指向东方，轴z_d指向南方。根据这个定义，此坐标系可以叫作“东上南坐标系”。由于大地是球体，当飞行器运动时，这个坐标系的原点和指向都是变化的。

注意：此坐标系无论就位置或指向而言，都不与地球固连。只不过在定义ψ、ϑ、γ、ψ_s、θ、γ_s等角度时，此坐标系的作用相当于第二章中的飞行器牵连地面坐标系的作用，所以两者采用了同样的符号。

1-3 机体、气流和航迹坐标系

机体坐标系$Ox_t y_t z_t$，气流坐标系$Ox_q y_q z_q$和航迹坐标系$Ox_h y_h z_h$的定义都与第二章中的相应定义相同。只不过在航迹坐标系定义中的“铅垂平面”现在应理解为“当地的铅垂平面”。

§ 2 各坐标系之間的关系及变换矩陣

2-1 浮动地球坐标系与地心坐标系的关系

这两个坐标系之间的关系用下列三个参数来确定（见图3-1）。

半径 r：地心O_c至飞行器质心O的距离。它可以表示成地球平均半径 r_D(=6,371,000m)与飞行高度h之和

$$r = r_D + h \qquad (3-1)$$

地理经度λ：从Greenwich子午线算起，东经为正，西经为负。定义域为 $-180°\leqslant\lambda\leqslant180°$。

地理纬度φ：从赤道算起，北纬为正，南纬为负。定义域为 $-90°\leqslant\varphi\leqslant90°$。

这三个参数r、λ、φ也决定飞行器质心在地心坐标系$O_cx_cy_cz_c$中的位置。关系式为

$$\left.\begin{aligned} x_c &= r\cos\varphi\sin\lambda \\ y_c &= r\cos\varphi\cos\lambda \\ z_c &= -r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (3-2)$$

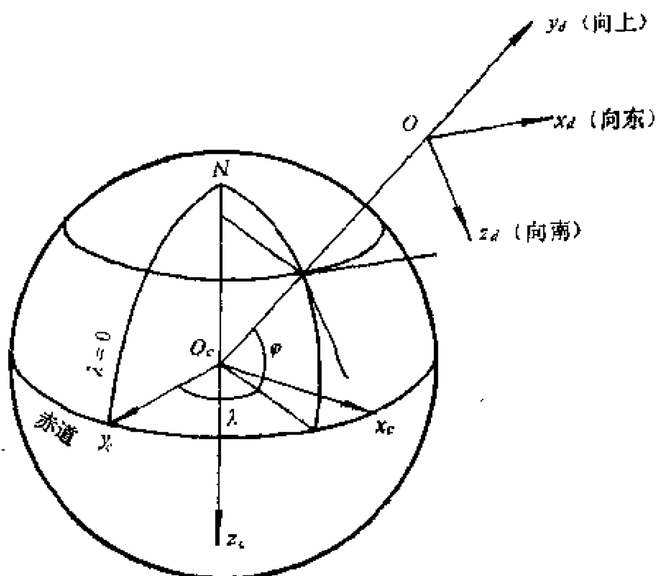


图3-1 浮动地球坐标系

由地心坐标系$O_cx_cy_cz_c$到浮动地球坐标系$Ox_dy_dz_d$的转换，可以通过如下两次转动和一次移动来实现（见图3-2）。首先$O_cx_cy_cz_c$绕轴z_c(即地球轴线)转过$-\lambda$，成为$x_d'y'z_c$；

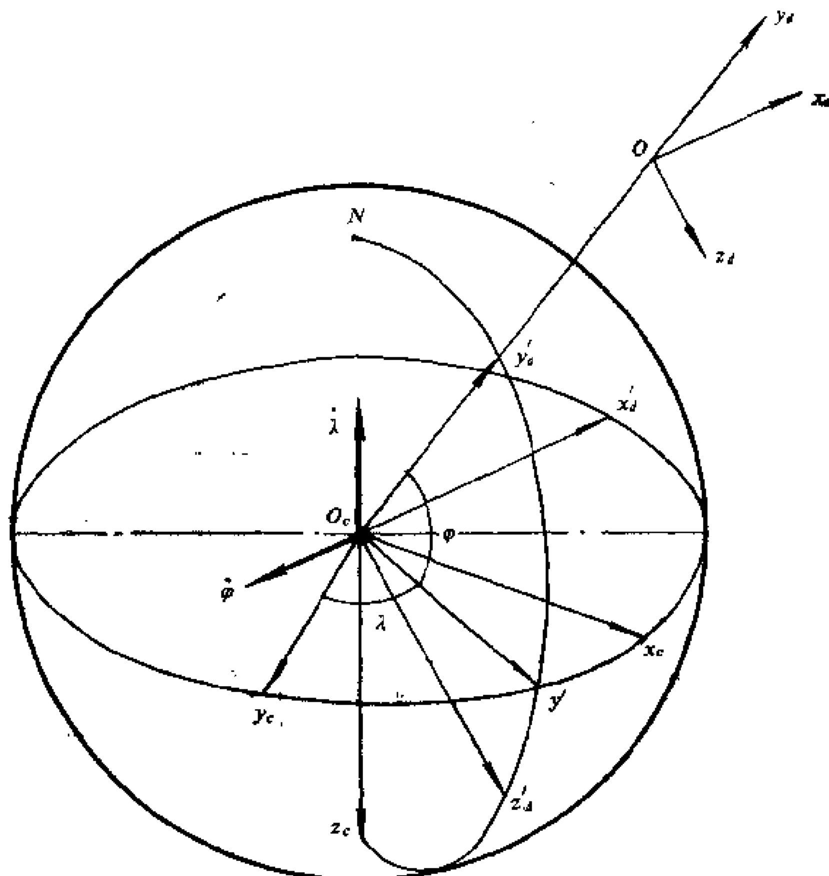


图3-2 地心坐标系与浮动地球坐标系的关系

然后绕轴x_d''转过$-\varphi$，成为$x_d'y_d'z_d'$；最后沿轴y_d平移距离r，就成为$Ox_dy_dz_d$。

因此，根据第一章1-4中的一般原理，从地心坐标系到浮动地球坐标系的变换矩阵等于

$$\mathbf{B}_c^d=\mathbf{B}_x(-\varphi)\mathbf{B}_z(-\lambda) \tag{3-3}$$

按公式（1-15）、（1-13）写出基元矩阵，代入上式，得

$$\mathbf{B}_c^d=\begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi\sin\lambda & \sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3-4}$$

2-2　其它坐标系之间的关系

其它坐标系（机体、半机体、航迹、气流、浮动地球坐标系）之间的角度，即偏航角ψ、俯仰角ϑ、滚转角γ、航迹偏转角ψ_s、航迹倾斜角θ、绕速度矢量的滚转角γ_s、侧滑角β、迎角α的定义，都同第二章一样。只不过现在的浮动地球坐标系取代了第二章中飞行器牵连地面坐标系的地位。

这些坐标系之间的变换矩阵，即$\mathbf{B}_d^t$、$\mathbf{B}_d^h$、$\mathbf{B}_d^q$、$\mathbf{B}_h^q$、$\mathbf{B}_q^b$、$\mathbf{B}_b^t$也和第二章得到的完全相同。本章仅考虑无风情况。

注意：定义ψ、ϑ、γ、ψ_s、θ、γ_s时，以浮动地球坐标系$Ox_dy_dz_d$为基准，但此坐标系的指向是随飞行器质心位置而改变（浮动）的。也就是说，当飞行器运动时此坐标系相对于地球作转动。

最后，用一个示意图把各个坐标系之间的关系清楚地表示出来，见图3-3。可见，此图的大部分均与图2-5相同。

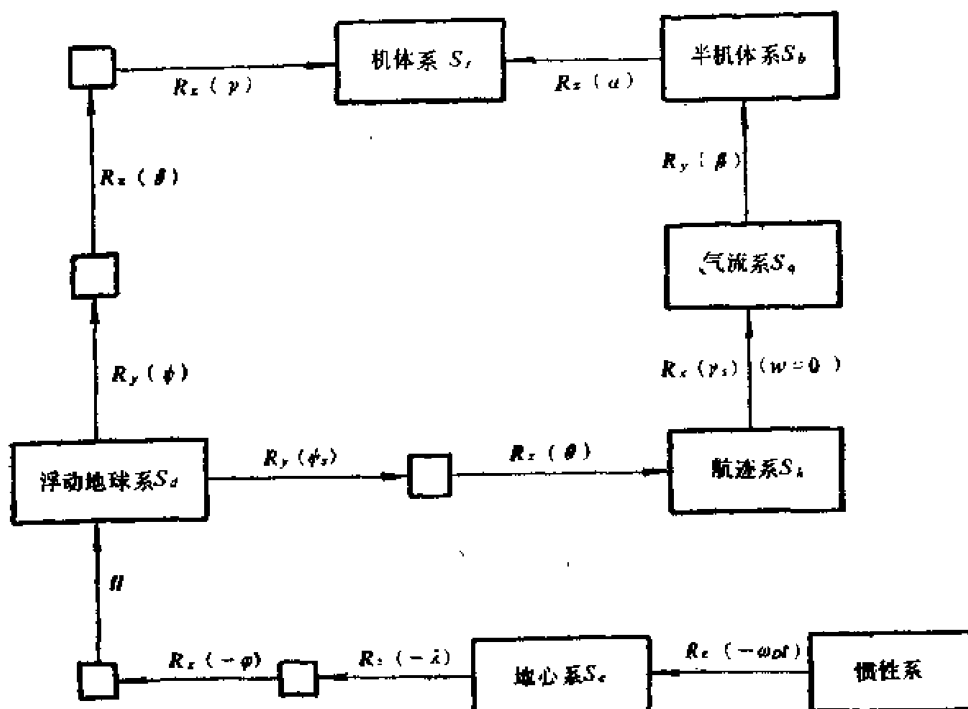


图3-3　各坐标系相互关系示意图

§ 3 飞行器质心的运动方程

3-1 在任意坐标系中列写的质心动力学方程

现在考虑地球绕自身轴线的旋转（自转），但不考虑地球绕太阳的旋转（公转），即认为地球中心的加速度为零。这时，地心坐标系$O_c x_c y_c z_c$是一个绕定轴作等速旋转的坐标系，其角速度$\boldsymbol{\omega}_D$的方向为指向北极，大小为$\omega_D = 7.272 \times 10^{-5}$rad/s。

设$\mathbf{a}_a$和$\mathbf{v}_a$为飞行器质心相对于惯性参考系的绝对加速度和绝对速度，$\mathbf{F}$ 为作用在飞行器上的外力的总和，m为飞行器质量，则可以直接写出质点动力学基本方程

$$m\mathbf{a}_a = \mathbf{F} \quad 或 \quad m\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{F} \tag{3-5}$$

在实际问题中人们关心的是飞行器相对于地球的运动，即飞行器在地心坐标系$O_c x_c y_c z_c$中的运动。根据加速度合成定理，有

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c \tag{3-6}$$

其中右边的三项分别阐述如下：

$\mathbf{a}_r$是相对加速度，即相对于（与地球固连的）地心坐标系的加速度。按定义，它等于相对速度在该活动坐标系（即地心坐标系）中的相对导数

$$\mathbf{a}_r = \left(\frac{\delta \mathbf{v}_r}{\delta t}\right)_c \tag{3-7}$$

其中$\mathbf{v}_r$是飞行器质心对地心坐标系的相对速度。

$\mathbf{a}_e$是牵连加速度，按一般公式

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{0c} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

其中$\mathbf{a}_{0c}$是参考系原点的加速度，在这里就是地心的加速度，前已指出，它等于零；$\boldsymbol{\varepsilon}$是参考系的角加速度，在这里也等于零；$\boldsymbol{\omega}$是参考系的角速度，在这里就是地球自转角速度$\boldsymbol{\omega}_D$；$\mathbf{r}$是质点位置的矢径，在这里就是矢径$O_c O$（见图3-2）。因此

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\omega}_D \times (\boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}) \tag{3-8}$$

它就是由地球旋转引起的向心加速度。

$\mathbf{a}_c$是Coriolis加速度，由于$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_D$，它等于

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{v}_r \tag{3-9}$$

把式（3-6）代入式（3-5），有

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m(\mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c)$$

或

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_c$$

其中

$$\mathbf{S}_e = -m\mathbf{a}_e, \quad \mathbf{S}_c = -m\mathbf{a}_c \tag{3-10}$$

分别为牵连惯性力和Coriolis惯性力。

考虑到式（3-7），写出

$$m\left(\frac{\delta \mathbf{v}_r}{\delta t}\right)_c = \mathbf{F} + \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_c \tag{3-11}$$

现在设想有另外某一个动坐标系$Oxyz$，它相对于动坐标系$O_c x_c y_c z_c$具有相对角速度$\boldsymbol{\omega}_r$。矢量$\boldsymbol{\omega}_r$，$\mathbf{v}_r$都可以在$Oxyz$中分解

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_r &= \omega_{rx}\mathbf{i}+\omega_{ry}\mathbf{j}+\omega_{rz}\mathbf{k}\\ \mathbf{v}_r &= v_{rx}\mathbf{i}+v_{ry}\mathbf{j}+v_{rz}\mathbf{k}\end{aligned}\right\} \tag{3-12}$$

其中i、j、k为坐标系$Oxyz$的单位矢量

根据第一章公式（1-28），有

$$\left(\frac{\delta \mathbf{v}_r}{\delta t}\right)_c=\left(\frac{\delta \mathbf{v}_r}{\delta t}\right)+\boldsymbol{\omega}_r\times\mathbf{v}_r \tag{3-13}$$

其中

$$\left(\frac{\delta \mathbf{v}_r}{\delta t}\right)=\frac{dv_{rx}}{dt}\mathbf{i}+\frac{dv_{ry}}{dt}\mathbf{j}+\frac{dv_{rz}}{dt}\mathbf{k} \tag{3-14}$$

是矢量$\mathbf{v}_r$在动坐标系$Oxyz$中的相对导数。

把式（3-13）代入式（3-11），得到

$$m\left[\left(\frac{\delta \mathbf{v}_r}{\delta t}\right)+\boldsymbol{\omega}_r\times\mathbf{v}_r\right]=\mathbf{F}+\mathbf{S}_e+\mathbf{S}_c \tag{3-15}$$

利用公式（1-29′），把方程（3-15）写成矩阵形式

$$m\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}v_{rx}\\ v_{ry}\\ v_{rz}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\omega_{rx}\\ \omega_{ry}\\ \omega_{rz}\end{pmatrix}^{ss}\begin{pmatrix}v_{rx}\\ v_{ry}\\ v_{rz}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}F_x+S_{ex}+S_{cx}\\ F_y+S_{ey}+S_{cy}\\ F_z+S_{ez}+S_{cz}\end{pmatrix} \tag{3-16}$$

再次说明：这里的下标x、y、z代表在所选的参考坐标系$Oxyz$中的分量；$\mathbf{v}_r$是飞行器质心对地球（即对地心坐标系）的相对速度；$\boldsymbol{\omega}_r$是所选取的参考坐标系$Oxyz$对地球的相对角速度；$\mathbf{F}$代表作用力；$\mathbf{S}_e$和$\mathbf{S}_c$分别代表由地球旋转引起的牵连惯性力和Coriolis惯性力。

以后为了书写方便起见，就用符号 $\mathbf{v}$ 代表飞行器质心对地球的相对速度$\mathbf{v}_r$（省略下标r）。

3-2 在航迹坐标系中的质心运动方程

现在选取航迹坐标系$Ox_hy_hz_h$作为参考系。考虑到速度$\mathbf{v}$（对地球的相对速度）在此坐标系中的分量为（v，0，0），方程（3-16）成为

$$m\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}v\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\omega_{h-c\cdot xh}\\ \omega_{h-c\cdot yh}\\ \omega_{h-c\cdot zh}\end{pmatrix}^{ss}\begin{pmatrix}v\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}F_{xh}+S_{exh}+S_{cxh}\\ F_{yh}+S_{eyh}+S_{cyh}\\ F_{zh}+S_{ezh}+S_{czh}\end{pmatrix} \tag{3-17}$$

下面分别研究各个部分。

航迹系相对于地心系的转动角速度$\boldsymbol{\omega}_{h-c}$可表示成两部分之和

$$\boldsymbol{\omega}_{h-c}=\boldsymbol{\omega}_{h-d}+\boldsymbol{\omega}_{d-c} \tag{3-18}$$

$\boldsymbol{\omega}_{h-d}$为航迹系相对于浮动地球系的转动角速度，根据第二章4-1中的分析和式（2-27），它等于

$$\boldsymbol{\omega}_{h-d}=\dot{\psi}_s\sin\theta\,\mathbf{i}_h+\dot{\psi}_s\cos\theta\,\mathbf{j}_h+\dot{\theta}\mathbf{k}_h \tag{3-19}$$

$\boldsymbol{\omega}_{d-c}$为浮动地球系相对于地心系的转动角速度，根据前面3-1中的分析、并参看图3-2，它等于

$$\boldsymbol{\omega}_{d-c}=-\dot{\lambda}\mathbf{k}_c-\dot{\varphi}\mathbf{i}_d \tag{3-20}$$

把式（3-19）和（3-20）代入式（3-18），并在航迹系中分解，得

$$\begin{pmatrix}\omega_{h-c\cdot xh}\\ \omega_{h-c\cdot yh}\\ \omega_{h-c\cdot zh}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\psi}_s\sin\theta\\ \dot{\psi}_s\cos\theta\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}+\mathbf{B}_d^h\mathbf{B}_c^d\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\dot{\lambda}\end{pmatrix}+\mathbf{B}_d^h\begin{pmatrix}-\dot{\varphi}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \dot\psi_s \sin\theta + \dot\lambda(\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\sin\psi_s\cos\varphi) - \dot\varphi\cos\theta\cos\psi_s \\ \dot\psi_s\cos\theta + \dot\lambda(\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\sin\psi_s\cos\varphi) + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi_s \\ \dot\theta \quad - \dot\lambda\cos\psi_s\cos\varphi \quad - \dot\varphi\sin\psi_s \end{pmatrix} \tag{3-21}
$$

为了消去上述表达式中的变量$\dot\lambda$和$\dot\varphi$（经度和纬度变化率），要利用如下的运动学关系：

$$
r\dot\varphi = -v_{zd} = v\cos\theta\sin\psi_s
$$

$$
r\cos\varphi\dot\lambda = v_{xd} = v\cos\theta\cos\psi_s
$$

由此有

$$
\left.\begin{aligned} \dot\varphi &= -v\cos\theta\sin\psi_s/r \\ \dot\lambda &= v\cos\theta\cos\psi_s/r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3-22}
$$

作用力$\mathbf{F}$的分量仍然与第二章中一样可以写成

$$
\begin{pmatrix} F_{xh} \\ F_{yh} \\ F_{zh} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_q^h \mathbf{B}_t^q \begin{pmatrix} P\cos\varphi_p \\ P\sin\varphi_p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{B}_q^h \begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{B}_d^h \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3-23}
$$

牵连惯性力$\mathbf{S}_e$为

$$
\mathbf{S}_e = -m\boldsymbol{\omega}_D \times (\boldsymbol{\omega}_D \times r) \tag{3-24}
$$

首先写出$\boldsymbol{\omega}_D$和$\mathbf{r}$在地心坐标系中的分量

$$
\begin{pmatrix} \omega_{D\cdot xc} \\ \omega_{D\cdot yc} \\ \omega_{D\cdot zc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_D \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} r_{xc} \\ r_{yc} \\ r_{zc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\ \sin\lambda \\ r\cos\varphi\ \cos\lambda \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}
$$

于是式（3-24）可以表示成

$$
\begin{pmatrix} S_{e\cdot xc} \\ S_{e\cdot yc} \\ S_{e\cdot zc} \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_D \end{pmatrix}^{ss} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_D \end{pmatrix}^{ss} \begin{pmatrix} r\cos\varphi\ \sin\lambda \\ r\cos\varphi\ \cos\lambda \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}
$$

$$
= m\omega_D^2 r\cos\varphi \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3-25}
$$

然后转换到航迹坐标系：

$$
\begin{pmatrix} S_{e\cdot xh} \\ S_{e\cdot yh} \\ S_{e\cdot zh} \end{pmatrix} = m\omega_D^2 r\cos\varphi\, \mathbf{B}_d^h \mathbf{B}_c^d \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= m\omega_D^2 r\cos\varphi \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi_s\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\psi_s\sin\varphi \\ \cos\psi_s\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{3-26}
$$

Coriolis 惯性力$\mathbf{S}_c$为

$$
\mathbf{S}_c = -2m\boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{v} \tag{3-27}
$$

（注意这里$\mathbf{v}$代表相对速度）。它在航迹坐标系中的分量可以写成

$$\begin{pmatrix} S_{c\cdot xh} \\ S_{c\cdot yh} \\ S_{c\cdot zh} \end{pmatrix} = -2m\left\{ \mathbf{B}_d^h \mathbf{B}_c^d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_D \end{pmatrix} \right\}^{ss} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2mv\omega_D \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\psi_s\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\sin\psi_s\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3-28}$$

地球引力加速度g的变化规律为

$$g = g_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2 \tag{3-29}$$

其中 $g_0 = 9.8204\mathrm{m/s^2}$，为地球表面的引力加速度；

$r_D = 6371000\mathrm{m}$，为地球的平均半径。

把式（3-21）、（3-22）、（3-23）、（3-26）、（3-28）、（3-29）代入式（3-17）中，展开以后就得到在航迹坐标系中建立的飞行器质心动力学方程

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= \left\{P\cos(\alpha+\varphi_p)\cos\beta - Q - mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2\sin\theta\right\} + \{\ 0\ \} + \{\ 0\ \} + \\
&\quad + \{\ m\omega_D^2 r\cos\varphi(\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi_s\sin\varphi)\ \} \\
mv\frac{d\theta}{dt} &= \Big\{P[\cos(\alpha+\varphi_p)\sin\beta\sin\gamma_s + \sin(\alpha+\varphi_p)\cos\gamma_s] + Y\cos\gamma_s - \\
&\quad - Z\sin\gamma_s - mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2\cos\theta\Big\} + \left\{\frac{1}{r}\ mv^2\cos\theta\right\} + \\
&\quad + \{\ 2mv\omega_D\cos\psi_s\cos\varphi\ \} + \{\ m\omega_D^2 r\cos\varphi(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\psi_s\sin\varphi)\ \} \\
-mv\cos\theta\frac{d\psi_s}{dt} &= \{\ P[-\cos(\alpha+\varphi_p)\sin\beta\cos\gamma_s + \sin(\alpha+\varphi_p)\sin\gamma_s] + Y\sin\gamma_s + \\
&\quad + Z\cos\gamma_s\ \} + \left\{\frac{1}{r}mv^2\cos^2\theta\cos\psi_s\,\mathrm{tg}\varphi\right\} + \{\ 2mv\omega_D(\cos\theta\sin\varphi - \\
&\quad - \sin\theta\sin\psi_s\cos\varphi)\ \} + \{\ m\omega_D^2 r\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi_s\ \}
\end{aligned}\right\} \tag{3-30}$$

为了说明各个因素对运动方程的贡献，把上面每个方程的右边分为四部分，用｛ ｝标出。第一部分是直接作用在飞行器上的力，第二章（平面大地情况）的方程（2-29)的右边正好就是这一部分；第二部分表示地球曲率的影响；第三部分是由地球旋转而引起的Coriolis惯性力；第四部分表示由地球旋转而引起的牵连惯性力（即离心力）。这四部分的顺序，正是按照它们的重要性的顺序排列的。在本章§5，将分析这四部分力的作用的量级。

因为飞行器的位置要用距离r、经度λ和纬度φ这三个参数确定，而且在动力学方程（3-30）中包含变量λ和φ，所以还需要补充三个运动学方程来描述这三个参数的变化。为此，把速度$\mathbf{v}$分解到浮动地球坐标系，得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v_{yd} = v\sin\theta \\
r\frac{d\varphi}{dt} &= -v_{zd} = v\cos\theta\sin\psi_s \\
r\cos\varphi\frac{d\lambda}{dt} &= v_{xd} = v\cos\theta\cos\psi_s
\end{aligned}\right\} \tag{3-31}$$

3-3 在浮动地球坐标系中的质心运动方程

现在选取浮动地球坐标系$Ox_dy_dz_d$作为参考坐标系。于是方程（3-16）写成

$$m\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \omega_{d-c\cdot xd} \\ \omega_{d-c\cdot yd} \\ \omega_{d-c\cdot zd} \end{pmatrix}^{ss}\begin{pmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} F_{xd}+S_{e\cdot xd}+S_{c\cdot xd} \\ F_{yd}+S_{e\cdot yd}+S_{c\cdot yd} \\ F_{zd}+S_{e\cdot zd}+S_{c\cdot zd} \end{pmatrix} \tag{3-32}$$

下面分别考虑其中的各个分量。

浮动地球系相对于地心系的转动角速度等于[参见（3-20）式]

$$\boldsymbol{\omega}_{d-c}=-\dot{\lambda}\mathbf{k}_c-\dot{\varphi}\mathbf{i}_d \tag{3-33}$$

因此它的分量为

$$\begin{pmatrix} \omega_{d-c\cdot xd} \\ \omega_{d-c\cdot yd} \\ \omega_{d-c\cdot zd} \end{pmatrix}=\mathbf{B}_c^d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\lambda} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \\ \dot{\lambda}\sin\varphi \\ -\dot{\lambda}\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3-34}$$

考虑到运动学关系

$$\left.\begin{aligned} r\dot{\varphi}&=-v_{zd} \\ r\cos\varphi\dot{\lambda}&=v_{xd} \end{aligned}\right\} \tag{3-35}$$

则有

$$\begin{pmatrix} \omega_{d-c\cdot xd} \\ \omega_{d-c\cdot yd} \\ \omega_{d-c\cdot zd} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -v_{zd}/r \\ v_{xd}\mathrm{tg}\varphi/r \\ -v_{xd}/r \end{pmatrix} \tag{3-36}$$

作用力$\mathbf{F}$的分量为

$$\begin{pmatrix} F_{xd} \\ F_{yd} \\ F_{zd} \end{pmatrix}=\mathbf{B}_t^d\begin{pmatrix} P\cos\varphi_p \\ P\sin\varphi_p \\ 0 \end{pmatrix}+\mathbf{B}_q^d\begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -mg_0(r_D/r)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3-37}$$

牵连惯性力$\mathbf{S}_e=-m\,\boldsymbol{\omega}_D\times(\boldsymbol{\omega}_D\times\mathbf{r})$。由于

$$\begin{pmatrix} \omega_{D\cdot xd} \\ \omega_{D\cdot yd} \\ \omega_{D\cdot zd} \end{pmatrix}=\mathbf{B}_c^d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_D \end{pmatrix}=\omega_D\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3-38}$$

以及

$$\begin{pmatrix} r_{xd} \\ r_{yd} \\ r_{zd} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3-39}$$

所以

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} S_{e\cdot xd} \\ S_{e\cdot yd} \\ S_{e\cdot zd} \end{pmatrix}&=-m\omega_D^2\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}^{ss}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}^{ss}\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=m\omega_D^2 r\begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3-40}$$

Coriolis惯性力$\mathbf{S}_c=-2m\,\boldsymbol{\omega}_D\times\mathbf{v}$的分量为

$$\begin{pmatrix} S_{c\cdot xd} \\ S_{c\cdot yd} \\ S_{c\cdot zd} \end{pmatrix}=-2m\omega_D\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}^{ss}\begin{pmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{pmatrix}.$$

$$
-2m\omega_D\begin{Bmatrix} v_{yd}\cos\varphi + v_{zd}\sin\varphi \\ -v_{xd}\cos\varphi \\ -v_{xd}\sin\varphi \end{Bmatrix} \tag{3-41}
$$

把式（3-36）、（3-37）、（3-40）、（3-41）代入式（3-32）中，得到在浮动地球坐标系中建立的飞行器质心动力学方程如下：

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{dv_{xd}}{dt} =& \{P[\cos\varphi_p\cos\psi\cos\theta + \sin\varphi_p(\sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\sin\theta\cos\gamma)] - Q\cos\psi_s\cos\theta + \\
&+ Y(\sin\psi_s\sin\gamma_s - \cos\psi_s\sin\theta\cos\gamma_s) + Z(\sin\psi_s\cos\gamma_s + \\
&+ \cos\psi_s\sin\theta\sin\gamma_s)\} + \left\{\frac{m}{r}(\operatorname{tg}\varphi v_{zd}v_{xd} - v_{xd}v_{yd})\right\} + \\
&+ \{-2m\omega_D(\sin\varphi v_{zd} + \cos\varphi v_{yd})\} + \{0\} \\
m\frac{dv_{yd}}{dt} =& \{P(\cos\varphi_p\sin\theta + \sin\varphi_p\cos\theta\cos\gamma) - Q\sin\theta + Y\cos\theta\cos\gamma_s - \\
&- Z\cos\theta\sin\gamma_s - mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2\} + \left\{\frac{m}{r}(v_{xd}^2 + v_{zd}^2)\right\} + \\
&+ \{2m\omega_D\cos\varphi v_{xd}\} + \{m\omega_D^2 r\cos^2\varphi\} \\
m\frac{dv_{zd}}{dt} =& \{P[-\cos\varphi_p\sin\psi\cos\theta + \sin\varphi_p(\cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\theta\cos\gamma)] + \\
&+ Q\sin\psi_s\cos\theta + Y(\cos\psi_s\sin\gamma_s + \sin\psi_s\sin\theta\cos\gamma_s) + Z(\cos\psi_s\cos\gamma_s - \\
&- \sin\psi_s\sin\theta\sin\gamma_s)\} + \left\{-\frac{m}{r}(\operatorname{tg}\varphi v_{xd}^2 - v_{yd}v_{zd})\right\} + \\
&+ \{2m\omega_D\sin\varphi v_{xd}\} + \{m\omega_D^2 r\cos\varphi\sin\varphi\}
\end{aligned}\right\} \tag{3-42}
$$

象式（3-30）那样，在方程组（3-42）的每一个方程的右边，用{ }分成四部分。第一部分是直接作用力；第二部分表示地球曲率的影响；第三部分是由地球旋转引起的Coriolis惯性力；第四部分是由地球旋转引起的牵连惯性力。

因为最后必须用球坐标r，λ，φ确定飞行器相对于地球的位置，所以需要补充下列运动学方程：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v_{yd} \\
r\frac{d\varphi}{dt} &= -v_{zd} \\
r\cos\varphi\frac{d\lambda}{dt} &= v_{xd}
\end{aligned}\right\} \tag{3-43}
$$

用以下式子来计算速度的大小和方向：

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{v_{yd}}{v} \\
\operatorname{tg}\psi_s &= -\frac{v_{zd}}{v_{xd}} \\
v &= \sqrt{v_{xd}^2 + v_{yd}^2 + v_{zd}^2}
\end{aligned}\right\} \tag{3-44}
$$

3-4　飞行距离的计算

按以上方程计算的结果是球坐标$r(t)$、$\lambda(t)$、$\varphi(t)$，它们能单值地确定飞行器相对于地球的位置。当计算飞行器的航程（或射程）时，还要求知道飞行器离起飞点（或发射点）的距离，这距离是按在地球表面上的铅垂投影点来计量的，而地球表面上两点之间的距离是指通过这两点的大圆的弧长。

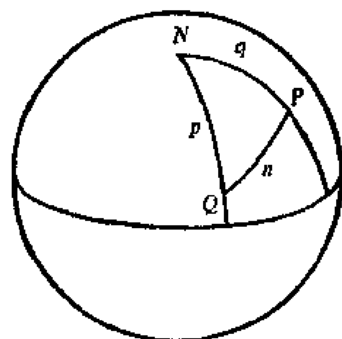


图3-4　球面三角形QNP

设：起飞点为$Q(\lambda_0, \varphi_0)$，飞行器在地面上的投影点为$P(\lambda, \varphi)$。求PQ弧长（见图3-4）。

为此，分别通过Q点和P点作子午线QN和PN，这里N是北极。在球面三角形QNP中，

角$N=\lambda-\lambda_0$，边$p=\frac{\pi}{2}-\varphi_0$，边$q=\frac{\pi}{2}-\varphi$。

已知两边及其夹角，可求出第三边n：

$$\cos n=\cos p\cos q+\sin p\sin q\cos N$$

所以

$$\cos n=\sin\varphi_0\sin\varphi+\cos\varphi_0\cos\varphi\cos(\lambda-\lambda_0) \tag{3-45}$$

而飞行距离（即PQ弧长）s则为

$$s=r_D n \tag{3-46}$$

当飞行距离s很小（例如几百公里）时，公式（3-45）将造成相当大的舍入误差。注意到，这时n、$\varphi-\varphi_0$和$\lambda-\lambda_0$都是很小的角，式（3-45）可以变换成

$$1-\frac{1}{2}n^2\approx\sin\varphi_0\sin\varphi+\cos\varphi_0\cos\varphi\left[1-\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\right]$$

$$=\cos(\varphi-\varphi_0)-\cos\varphi_0\cos\varphi\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2$$

$$\approx1-\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_0)^2-\cos^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi)\right]\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2$$

由此得到距离s的近似公式

$$s=r_D n\approx r_D\sqrt{(\varphi-\varphi_0)^2+\cos^2\varphi_{pj}(\lambda-\lambda_0)^2} \tag{3-47}$$

其中引用了平均纬度

$$\varphi_{pj}=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_0) \tag{3-48}$$

§4　飞行器绕质心转动的方程

仍假设飞行器具有纵向对称平面，因而$I_{yz}=I_{zx}=0$。转动动力学方程仍然是

$$\frac{d\omega_x}{dt}=\frac{1}{I_xI_y-I_{xy}^2}[I_y\sum M_x+I_{xy}\sum M_y-I_{xy}(I_x+I_y-I_z)\omega_z\omega_x+$$
$$+(I_y^2-I_{xy}^2-I_yI_z)\omega_y\omega_z]$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{1}{I_xI_y - I_{xy}^2}[I_x\sum M_y + I_{xy}\sum M_x - I_{xy}(I_z - I_x - I_y)\omega_y\omega_z + (I_xI_z - I_{xy}^2 - I_x^2)\omega_z\omega_x] \tag{3-49}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{1}{I_z}[\sum M_z - (I_y - I_x)\omega_x\omega_y + I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2)]$$

注意，这里的ω_x、ω_y、ω_z是飞行器的绝对角速度$\boldsymbol{\omega}$在机体坐标系中的分量，是$\omega_{t\cdot x\cdot t}$、$\omega_{t\cdot y\cdot t}$、$\omega_{t\cdot z\cdot t}$的省略写法。

根据角速度合成原理

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{t-d} + \boldsymbol{\omega}_{d-c} + \boldsymbol{\omega}_c$$

其中$\boldsymbol{\omega}_c$是地心坐标系的转动角速度，即地球自转角速度$\boldsymbol{\omega}_D$。

由此，并利用式（3-20），有

$$\boldsymbol{\omega}_{t-d} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{d-c} - \boldsymbol{\omega}_D = \boldsymbol{\omega} - (-\dot{\lambda}\mathbf{k}_c - \dot{\varphi}\mathbf{i}_d) - \omega_D\mathbf{k}_c$$

把上式分解到机体坐标系中

$$\begin{pmatrix} \omega_{t-d\cdot x\,t} \\ \omega_{t-d\cdot y\,t} \\ \omega_{t-d\cdot z\,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} - \mathbf{B}_d^t\mathbf{B}_c^d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\lambda} - \omega_D \end{pmatrix} + \mathbf{B}_d^t \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

展开后，得到

$$\begin{aligned} \omega_{t-d\cdot x\,t} &= \omega_x + (\dot{\lambda} - \omega_D)(-\sin\vartheta\sin\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi) + \dot{\varphi}\cos\vartheta\cos\psi \\ \omega_{t-d\cdot y\,t} &= \omega_y + (\dot{\lambda} - \omega_D)[-\cos\gamma\cos\vartheta\sin\varphi + (\cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi + \\ &\quad + \sin\gamma\cos\psi)\cos\varphi] + \dot{\varphi}(-\cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi + \sin\gamma\sin\psi) \\ \omega_{t-d\cdot z\,t} &= \omega_y + (\dot{\lambda} - \omega_D)[\sin\gamma\cos\vartheta\sin\varphi + (-\sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi + \\ &\quad + \cos\gamma\cos\psi)\cos\varphi] + \dot{\varphi}(\sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi) \end{aligned} \tag{3-50}$$

第二章得出的运动学方程（2-45）仍然有效，但其中的ω_x、ω_y、ω_z现在应理解为机体系相对于浮动地球系的转动角速度分量，因为角度ϑ、ψ、γ是机体系与浮动地球系之间的角度。于是，运动学方程是

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_{t-d\cdot x\,t} - \mathrm{tg}\vartheta(\omega_{t-d\cdot y\,t}\cos\gamma - \omega_{t-d\cdot z\,t}\sin\gamma) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_{t-d\cdot y\,t}\cos\gamma - \omega_{t-d\cdot z\,t}\sin\gamma) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{t-d\cdot y\,t}\sin\gamma + \omega_{t-d\cdot z\,t}\cos\gamma \end{aligned} \tag{3-51}$$

归结起来，计算飞行器转动运动的步骤是：按式（3-49）求出ω_x、ω_y、ω_z；再按式（3-50）求出$\omega_{t-d\cdot x\,t}$等；最后按式（3-51）求出γ，ψ，ϑ。这是严格的处理方法。

但实际上，研究飞行器的转动动力学特性时，$\boldsymbol{\omega}_D$和$\boldsymbol{\omega}_{d-c}$都远远小于飞行器转动的$\boldsymbol{\omega}$（即$\boldsymbol{\omega}_t$），因而可以取

$$\boldsymbol{\omega}_{t-d} \approx \boldsymbol{\omega}$$

于是转动运动学方程（3-50）和（3-51）可以简化成

$$
\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \operatorname{tg}\vartheta(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma) \\
\frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma) \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma
\end{aligned}
\tag{3-52}
$$

这就是说，当研究转动动态特性时可以不考虑地球的曲率和旋转。采用的方程（3-49）和（3-52），与第二章一样。

在求出γ、ψ、ϑ和θ、ψ_s以后，可利用第二章6-3中的关系式（2-48）、(2-49)、(2-51）计算β、α和γ_s。在必要时，仍可利用该章6-4中的关系式（2-57）计算$\dot\beta$和$\dot\alpha$。在“旋转球形大地”情况下，严格地说，所用关系式中的ω_x、ω_y、ω_z本来应该是相对角速度分量$\omega_{t-d\cdot x_t}$、$\omega_{t-d\cdot y_t}$、$\omega_{t-d\cdot z_t}$，但如前所述，可以近似地取为绝对角速度分量。

若质心运动方程是在浮动地球坐标系中给出的，则式（2-57）中的$\dot\theta$和$\dot\psi_s$还要利用由式（3-44）导出的如下公式计算：

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot\theta &= \frac{v\dot v_{yd} - v_{yd}(v_{xd}\dot v_{xd} + v_{yd}\dot v_{yd} + v_{zd}\dot v_{zd})/v}{v^2\cos\theta} \\
\dot\psi_s &= \cos^2\psi_s\frac{-v_{xd}\dot v_{zd} + v_{zd}\dot v_{xd}}{v_{xd}^2}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3-53}
$$

§5 关于运动方程的一般討論

5-1 两套方程体系

本章在把大地当作旋转的球体的条件下建立了飞行器的运动方程。

象第二章那样，本章也采用了两套不同的方程体系。第一套称为“航迹-机体体系”，缩写为HT。它的特征是：力方程在航迹坐标系中建立，力矩方程在机体坐标系中建立。第二套称为“地球-机体体系”，缩写为DT。在这个体系中，力方程在浮动地球坐标系中列写，力矩方程在机体坐标系中列写。表3-1总结了这两套方程体系的主要特征。

表3-1 方程体系的特性

方程体系	力方程的参考坐标系	力矩方程的参考坐标系	方 程 的 号 码
航迹-机体 (HT)	航迹坐标系	机体坐标系	(3-30)，(3-31)，(3-49)，(3-50)，(3-51)，(2-48)，(2-49)，(2-51)，(2-57) [可以用式(3-52)近似代替式(3-50)，(3-51)]
地球-机体 (DT)	浮动地球坐标系	机体坐标系	(3-42)，(3-43)，(3-44)，(3-49)，(3-50)，(3-51)，(2-48)，(2-49)，(2-51)，(2-57) (3-53) [可以用式(3-52)近似代替式(3-50)，(3-51)]

5-2 运动方程的方块图

图3-5和图3-6是这两套体系的运动方程方块图。

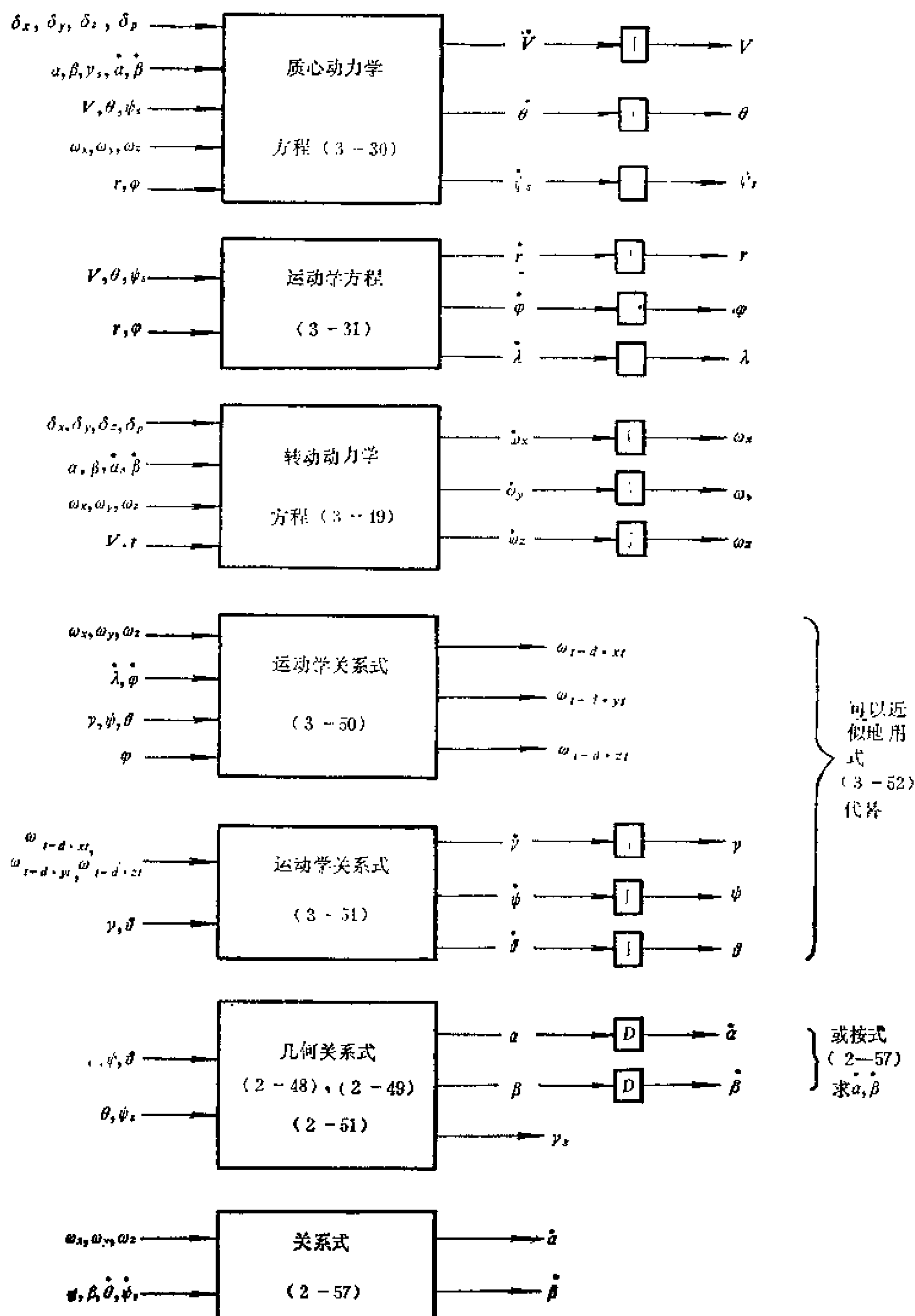


图3-5 IIT体系的方程方块图

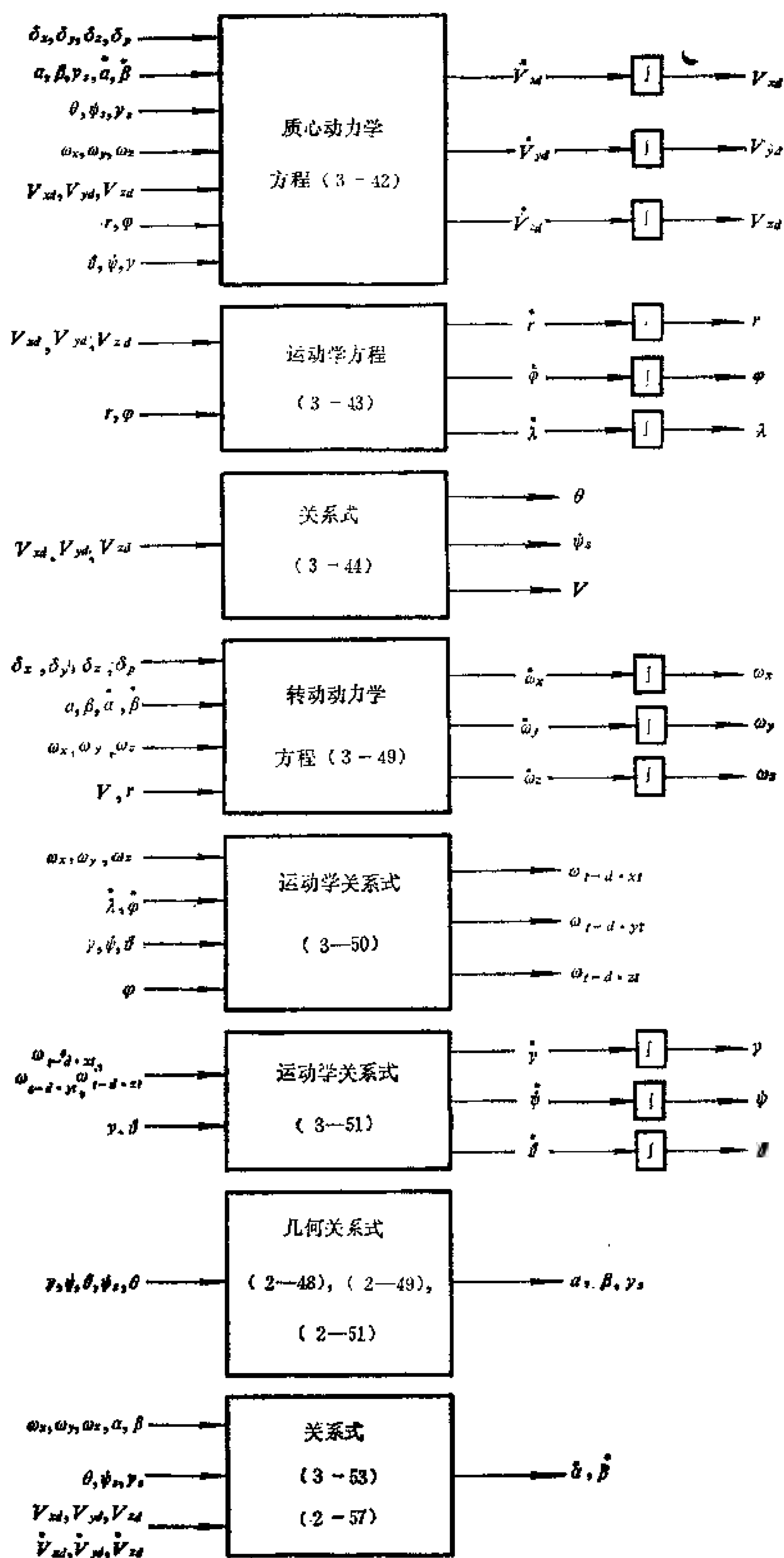


图3-6 DT体系的方程方块图

5-3　特殊情况之一

在考虑大地的曲率和旋转的条件下，现在来研究一种特殊情况，即在赤道平面内的对称飞行（见图3-7）。在这种情况下，纬度$\varphi=0$，飞行器的所有横侧运动参数——ψ、γ、ψ_s、γ_s、β、v_{zd}、ω_x、ω_y、δ_x、δ_y、Z、M_x、M_y——均等于零。因而运动方程大大简化，不难得出如下结果：

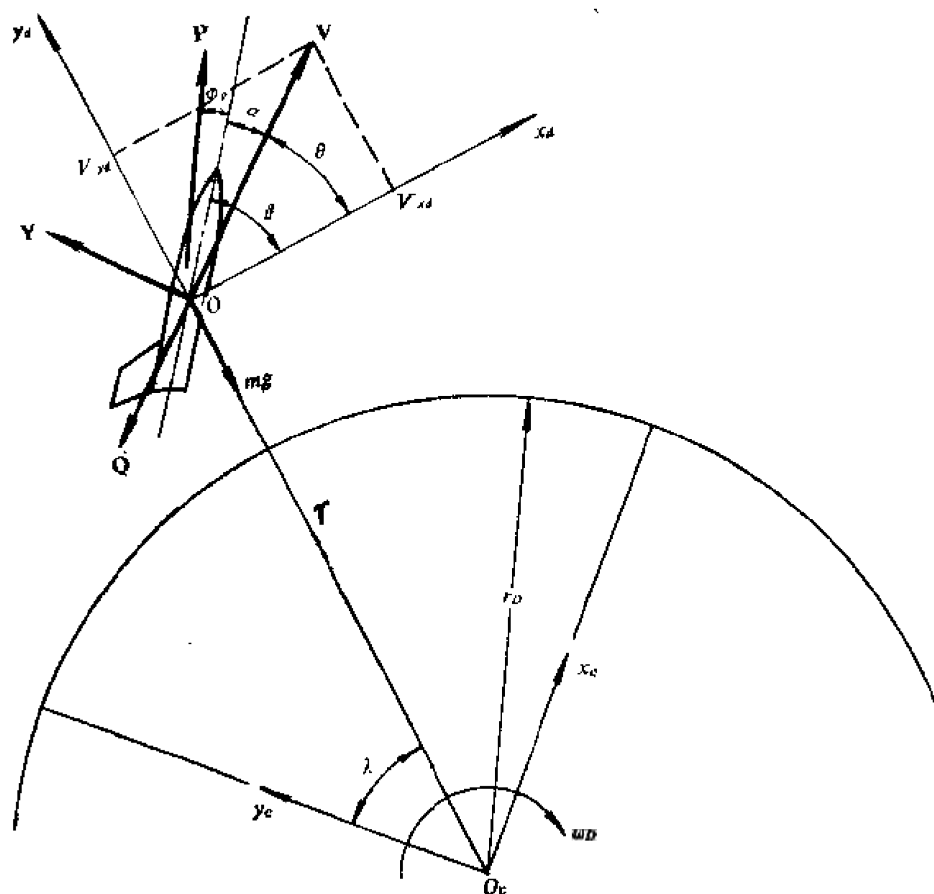


图3-7　在赤道平面内的对称飞行

HT体系的运动方程为

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= P\cos(\alpha+\varphi_p)-Q-mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2\sin\theta+m\omega_D^2 r\sin\theta \\
mv\frac{d\theta}{dt} &= P\sin(\alpha+\varphi_p)+Y-mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2\cos\theta+\frac{1}{r}mv^2\cos\theta+ \\
&\quad -2mv\omega_D+m\omega_D^2 r\cos\theta \\
\frac{dr}{dt} &= v\sin\theta \\
r\frac{d\lambda}{dt} &= v\cos\theta
\end{aligned}
\tag{3-54}
$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z + \dot{\lambda} - \omega_D$$

$$\alpha = \vartheta - \theta$$

DT体系的运动方程为

$$
\left.
\begin{aligned}
& m\frac{dv_{xd}}{dt} = P\cos(\varphi_p + \vartheta) - Q\cos\theta - Y\sin\theta - \frac{m}{r}v_{xd}v_{yd} - 2m\omega_D v_{yd} \\
& m\frac{dv_{yd}}{dt} = P\sin(\varphi_p + \vartheta) - Q\sin\theta + Y\cos\theta - mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2 + \frac{m}{r}v_{xd}^2 + \\
& \qquad - 2m\omega_D v_{xd} + m\omega_D^2 r \\
& \frac{dr}{dt} = v_{yd} \\
& r\frac{d\lambda}{dt} = v_{xd} \\
& \mathrm{tg}\theta = \frac{v_{yd}}{v_{xd}} \\
& v = \sqrt{v_{xd}^2 + v_{yd}^2} \\
& I_z\frac{d\omega_z}{dt} = M_z \\
& \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z + \dot{\lambda} - \omega_D \\
& \alpha = \vartheta - \theta
\end{aligned}
\right\} \quad (3\text{-}55)
$$

5-4 特殊情况之二

在某些情况下，地球旋转的效果远小于地球曲率的效果（详见本章5-5中的讨论），这时可以采用考虑地球曲率但忽略地球旋转的运动方程。同时，还假定飞行器在铅垂平面内作对称飞行。由于忽略地球旋转的效果，这样的对称飞行可以在任何大圆平面内（不一定在赤道平面内）实现。这就是常常遇到的特殊情况之二。

这时，飞行器质心的位置可以用极坐标（γ，σ）确定（见图3-8）。飞行器的运动方程可以由式（3-54）简化而来，只要把其中的ω_D取为0，把经度λ改为σ：

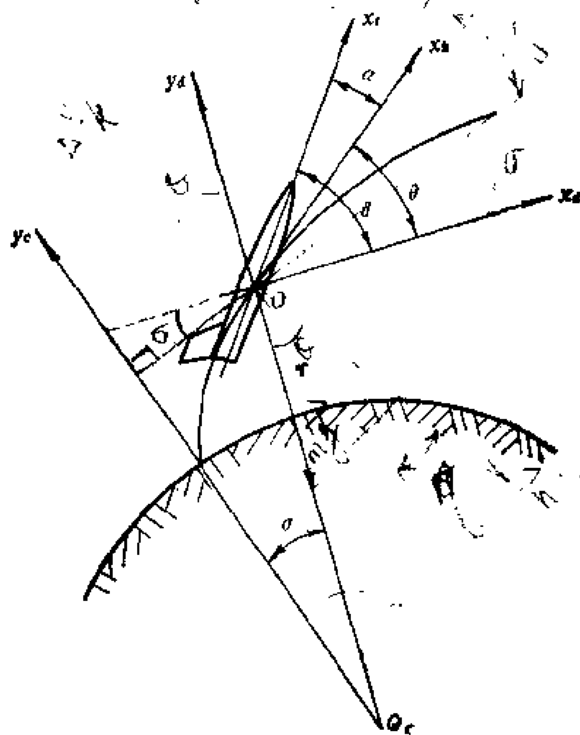


图3-8　在任意大圆平面内的对称飞行

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= P\cos(\alpha+\varphi_p) - Q - mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2\sin\theta \\
mv\frac{d\theta}{dt} &= P\sin(\alpha+\varphi_p) + Y - mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2\cos\theta + \frac{1}{r}mv^2\cos\theta \\
\frac{dr}{dt} &= v\sin\theta \\
r\frac{d\sigma}{dt} &= v\cos\theta \\
I_z\frac{d\omega_z}{dt} &= \sum M_z \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z + \dot\sigma \\
\alpha &= \vartheta - \theta \\
\dot\alpha &= \dot\vartheta - \dot\theta
\end{aligned}\right\} \tag{3-56}
$$

5-5 关于地球曲率和旋转的影响的估计

前面已指出，本章（把大地当作旋转的圆球体）的质心运动方程（3-30）或（3-42），与第二章（把大地当作平面）的相应方程（2-29）或（2-34）相比较，在方程的右边增加了三部分：第一部分是由地球曲率造成的；第二部分是由地球旋转引起的Coriolis惯性力；第三部分是由地球旋转引起的牵连惯性力（离心力）。现在来分析这三部分的影响大小。

为了明显起见，考虑一个特殊情况——在赤道平面内的水平飞行。这时$\theta=0$，方程（3-54）的第一和第二方程成为

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= P\cos(\alpha+\varphi_p) - Q \\
0 &= P\sin(\alpha+\varphi_p) + Y - mg_0\left(\frac{r_D}{r}\right)^2 + \frac{1}{r}mv^2 + \\
&\quad + 2mv\omega_D + m\omega_D^2 r
\end{aligned}\right\} \tag{3-57}
$$

可见，这时三部分附加力仅出现在法向力（即第二个）方程中。地球曲率的影响表现为mv^2/r，它与速度平方成正比，与距离r成反比；由地球旋转引起的Coriolis惯性力$2mv\omega_D$与速度成正比，而与距离r无关；由地球旋转引起的牵连惯性力$m\omega_D^2 r$与距离r成正比，与速度无关。

设飞行高度为300km，飞行速度v（指相对于地球的速度）分别等于300m/s，1000m/s（大约对应于$M=3$），3865m/s，7730m/s（卫星圆周轨道速度，即第一宇宙速度）。取

$$
\omega_D = 7.2921\times10^{-5}\,\text{rad/s}
$$
$$
r_D = 6.371\times10^6\,\text{m}
$$
$$
g_0 = 9.8202\,\text{m/s}^2
$$

算出

$$
r = r_D + h = 6.671\times10^6\,\text{m}
$$
$$
g = g_0(r_D/r)^2 = 8.96\,\text{m/s}^2
$$

上述三部分附加力与地球引力mg之比（以百分数表示）如表3-2所示。

表3-2　三部分附加力的大小（示例）

速　度 v (m/s)	地球曲率影响 $\left(\frac{mv^2}{r}\right)/mg$ (%)	Coriolis惯性力影响 $2mv\omega_D/mg$ (%)	牵连惯性力影响 $m\omega_D^2r/mg$ (%)
300	0.15	0.49	0.40
1000	1.67	1.63	0.40
3865	25	6.29	0.40
7730	100	12.6	0.40

可见，对于超高速飞行器，地球曲率的影响相当可观，不宜忽略；Coriolis惯性力也值得考虑；牵连惯性力足够小，可以忽略。

还必须指出，在运动方程式中出现的g应该是万有引力加速度。但用通常的物理实验（例如重力摆）测出的"重力加速度"实际上是万有引力加速度与由地球旋转造成的牵连加速度的合成结果。当使用这样的重力加速度数据时，牵连惯性力的作用已经隐含了，因而方程中不应再考虑这一项。

从以上的分析还可以看出，要不要考虑地球的曲率和旋转，其评判的准则并不是飞行距离和飞行时间，而是飞行速度。这个结论也许是与人们的直观印象相矛盾的。

§6　弹道式火箭的主动段运动方程

6-1　概述

虽然本章前几节所建立的运动方程，原则上适用于任何类型的超高速飞行器，但由于弹道式火箭的主动段具有某些特点，相应地要定义特别的坐标系和运动参数，建立一套特殊的运动方程。

弹道式火箭的主动段是火箭发动机工作时的飞行段。它有以下主要特点：

1. 以铅垂状态发射，并且在发射后有一个铅垂飞行段，只是在达到了足够的速度时才开始转弯；2. 在自动驾驶仪的控制下，火箭的偏航角ψ和滚转角γ（定义见后）都很小；3. 主动段的水平距离不大（见图3-9）。本节所建立的运动方程也适用于航天器的运载火箭的飞行，因为它也具备上述特点。

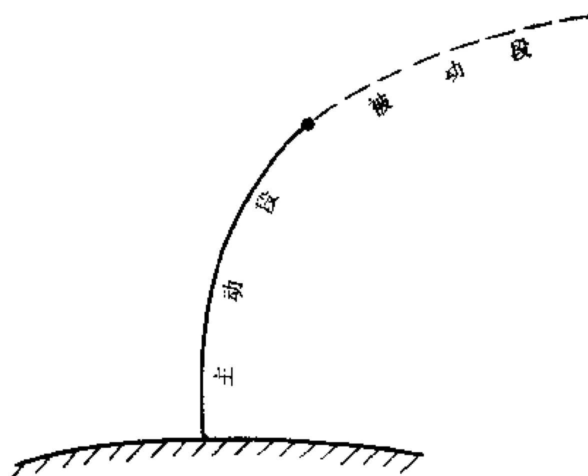


图3-9　弹道式火箭的主动段

在火箭发动机熄火以后的飞行段，称为被动段，它要用另外的方程来描述。

6-2 坐标系和变换矩阵

1. 地面坐标系及其与地心坐标系的关系

固定的地面坐标系$O_g x_g y_g z_g$固连于地球，跟地球一起旋转。原点O_g为发射点。轴y_g在发射点铅垂向上。轴x_g在射击平面内，水平向前。射击平面即是由发射点、目标点和地心所决定的平面（见图3-10）。轴z_g是水平的，垂直于射击平面。火箭质心的轨迹——弹道——就由坐标x_g，y_g，z_g描述。

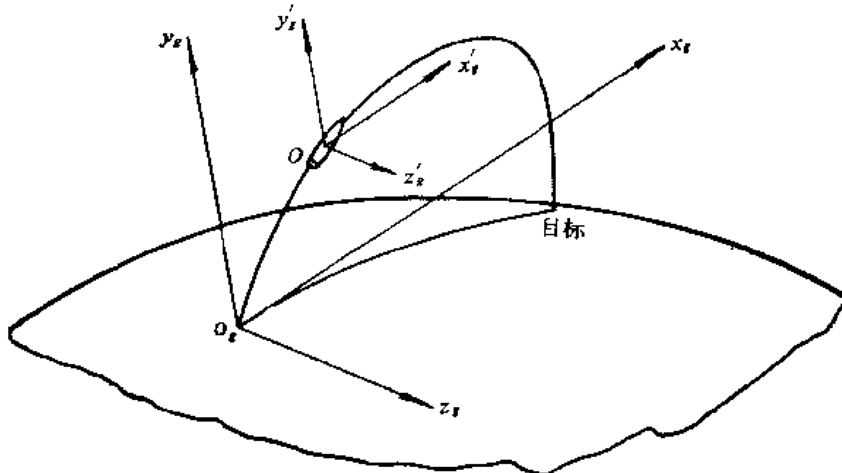


图3-10 固定的和牵连的地面坐标系

牵连的地面坐标系$Ox_g'y_g'z_g'$。原点O在火箭质心。轴$x_g'y_g'z_g'$分别平行于轴$x_g y_g z_g$（见图3-10）。当仅关心坐标系的方位时，把固定的地面坐标系和牵连的地面坐标系统称为地面坐标系，并且$Ox_g'y_g'z_g'$，也简写为$Ox_g y_g z_g$。

现考虑地面坐标系$O_g x_g y_g z_g$与地心坐标系$O_c x_c y_c z_c$（见本章§1）的关系。设：发射点O_g的地理经度和纬度为λ_0和φ_0；轴x_g的方向为由东向北偏转μ角（见图3-11）。

地心坐标系$O_c x_c y_c z_c$首先绕轴z_c转过$-\lambda_0$（即绕$-z_c$转过λ_0），然后绕轴x'转过$-\varphi_0$（即绕$-x'$转过φ_0），并且作平移，就得到通过发射点的东(x)上(y)南(z)坐标系。最后再绕轴y转过μ，就成为固定地面坐标系$O_g x_g y_g z_g$。

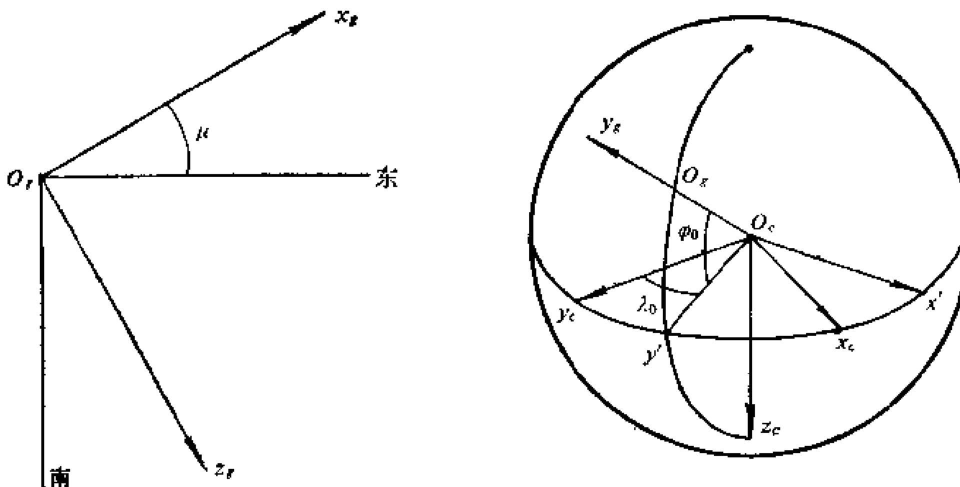


图3-11 地面坐标系$O_g x_g y_g z_g$与地心坐标系$O_c x_c y_c z_c$的关系

因此，由地心坐标系到地面坐标系的变换矩阵为

$$\mathbf{B}_e^g=\mathbf{B}_y(\mu)\mathbf{B}_x(-\varphi_0)\mathbf{B}_z(-\lambda_0)=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & -\cos\varphi_0\sin\mu \\ \cdots & \cdots & -\sin\varphi_0 \\ \cdots & \cdots & \cos\varphi_0\cos\mu \end{pmatrix} \tag{3-58}$$

这里仅写出了以后有用的第 3 列的元素。

注意，固定地面坐标系和地心坐标系都是与地球固连的，它们之间并没有相对运动。

2． 机体坐标系及其与地面坐标系的关系

机体（或弹体）坐标系$Ox_ty_tz_t$的定义仍与第二章相同。但机体的三个姿态角的定义不同于以前的。机体纵轴x_t与平面x_gy_g之间的角度称为偏航角ψ，向左偏转为正(见图3-12)。纵轴x_t在平面x_gy_g上的投影线x'与地面轴x_g之间的角度称为俯仰角ϑ，向上为正。机体的轴y_t与轴y'之间的角度称为滚转角γ，这里的轴y'在平面x_gy_g内，垂直于轴x_t；向右滚转时γ为正。

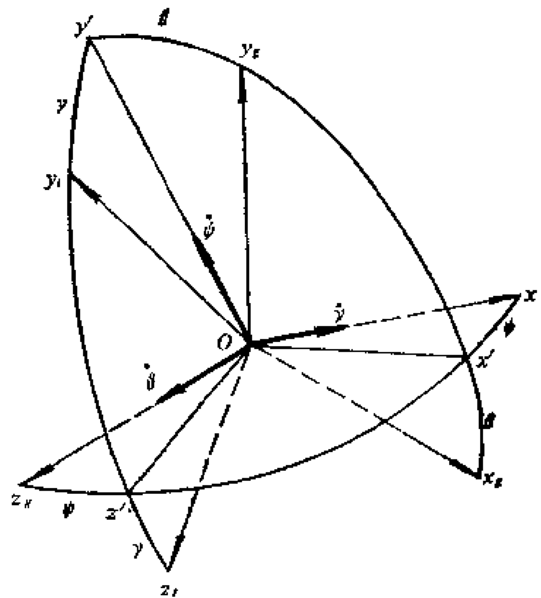


图3-12　机体坐标系与地面坐标系的关系

三个姿态角之所以这样定义，是因为：第一，以前定义的偏航角不适用于发射后的铅垂飞行段，例如，当纵轴x_t稍微偏离平面x_gy_g时，它在水平面上的投影线垂直于轴x_g，若按以前的定义，则偏航角为90°，显然不合理；第二，现在这样的定义与弹道式火箭中陀螺地平仪和垂直仪所测量的姿态角一致（详见文献[11]，[12]）。

由图 3-12 可见，如果从地面坐标系$Ox_gy_gz_g$出发，首先绕轴z_g转过角ϑ、到达$Ox'y'z'$，然后绕轴y'转过角ψ、到达$Ox_ty'z'$，最后绕轴x_t转过角γ，就与机体坐标系$Ox_ty_tz_t$重合。参考第一章1-4中式(1-16)可以得到由地面系到机体系的变换矩阵

$$\mathbf{B}_g^t=\mathbf{B}_x(\gamma)\mathbf{B}_y(\psi)\mathbf{B}_z(\vartheta)=\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\vartheta & -\sin\psi \\ -\cos\gamma\sin\vartheta+\sin\gamma\sin\psi\cos\vartheta & \cos\gamma\cos\vartheta+\sin\gamma\sin\psi\sin\vartheta & \sin\gamma\cos\psi \\ \sin\gamma\sin\vartheta+\cos\gamma\sin\psi\cos\vartheta & -\sin\gamma\cos\vartheta+\cos\gamma\sin\psi\sin\vartheta & \cos\gamma\cos\psi \end{pmatrix} \tag{3-59}$$

考虑到弹道式火箭主动段的特点——ψ和γ都很小，因而变换矩阵可以简化为

$$\mathbf{B}_g^t=\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & -\psi \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & \gamma \\ \gamma\sin\vartheta+\psi\cos\vartheta & -\gamma\cos\vartheta-\psi\sin\vartheta & 1 \end{pmatrix} \tag{3-60}$$

3． 气流坐标系及其与其它坐标系的关系

气流坐标系$Ox_qy_qz_q$的定义也与第二章相同。但它与地面坐标系之间的角度也应重新定义。速度矢量 **v**（指相对于地球的速度）与x_gy_g平面之间的角度称为航迹偏转角ψ_s，向左偏转为正。速度v在平面x_gy_g上的投影与轴x_g之间的角度称为航迹倾斜角θ，向上倾斜为

正。y_q轴与y'轴之间的角度称为速度滚转角γ_s（见图3-13）。

由于θ、ψ_s、γ_s完全对应于上述的ϑ、ψ、γ，而且ψ_s和γ_s也是很小的角，所以与矩阵$\mathbf{B}_g^t$完全类似地可以写出变换矩阵

$$\mathbf{B}_g^q=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -\psi_s \\ -\sin\theta & \cos\theta & \gamma_s \\ \gamma_s\sin\theta+\psi_s\cos\theta & -\gamma_s\cos\theta-\psi_s\sin\theta & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}61)$$

气流坐标系$Ox_qy_qz_q$与机体坐标系$Ox_ty_tz_t$之间的关系，仍然用迎角α和侧滑角β来确定。引用第二章2-3中式（2-6），并考虑到α、β都是小量，因此可以得到简化的变换矩阵

$$\mathbf{B}_q^t=\begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}62)$$

4. 各坐标系关系的示意图

以上各个坐标系之间的关系可以用一个简图表示出来（见图3-14）。

5. 几何关系

为了找出ϑ、θ、α之间及ψ、ψ_s、β之间的关系，利用如下矩阵等式：

$$\mathbf{B}_t^g=\mathbf{B}_g^q\mathbf{B}_t^g$$

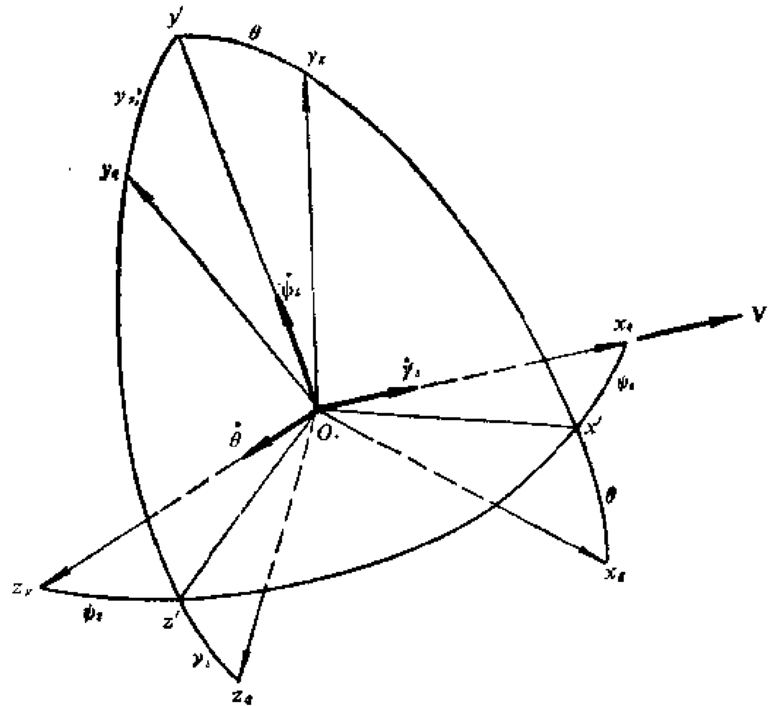


图3-13 气流坐标系与地面坐标系的关系

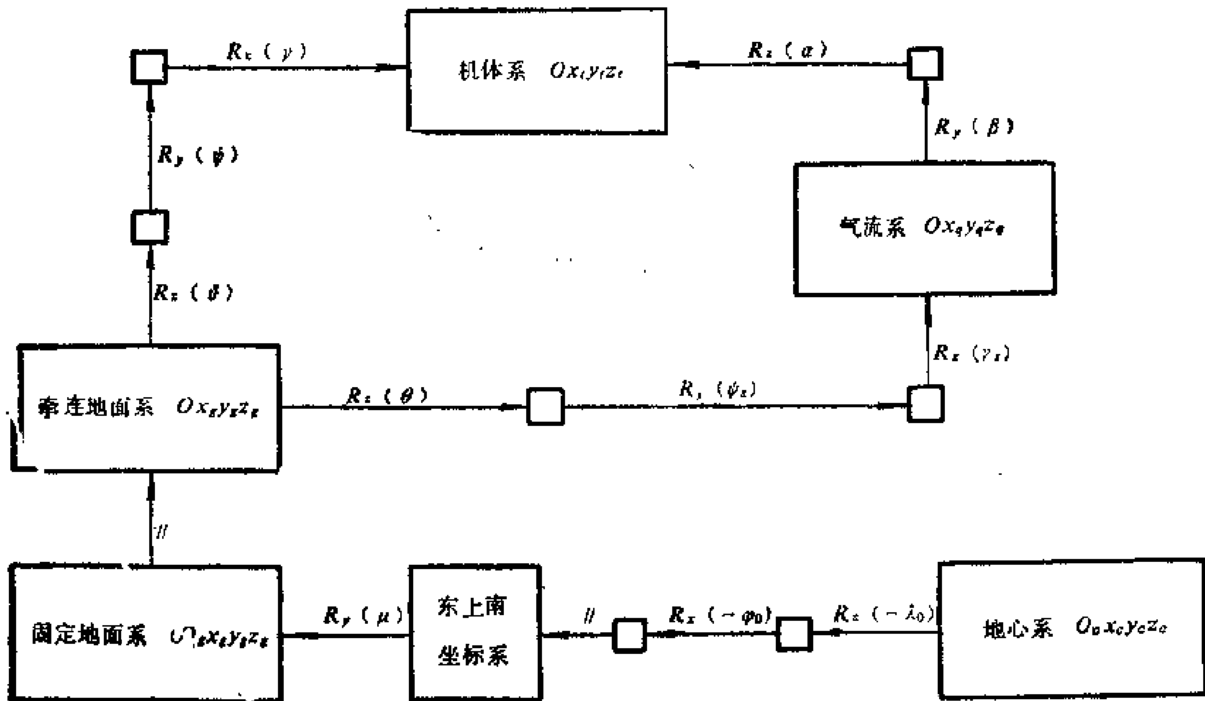


图3-14 弹道式火箭所用的坐标系关系简图

把式（3-62）、（3-61）和（3-60）代入上式，并展开后，得到九个等式，取出其中两个等式

$$
\left.\begin{aligned}
-\alpha &= -\cos\theta\sin\vartheta + \sin\theta\cos\vartheta - \psi_s\gamma \\
\beta &= \gamma\sin\vartheta\cos\theta + \psi\cos\vartheta\cos\theta - \gamma\cos\vartheta\sin\theta + \psi\sin\vartheta\sin\theta - \psi_s
\end{aligned}\right\}
$$

由第一式，写出

$$-\alpha \approx -\sin(\vartheta-\theta) \approx -(\vartheta-\theta)$$

所以

$$\alpha = \vartheta - \theta \tag{3-63}$$

由第二式，有

$$
\begin{aligned}
\beta &= \gamma\sin(\vartheta-\theta) + \psi\cos(\vartheta-\theta) - \psi_s \\
&= \gamma\sin\alpha + \psi\cos\alpha - \psi_s \\
&= \gamma\alpha + \psi - \psi_s
\end{aligned}
$$

所以

$$\beta = \psi - \psi_s \tag{3-64}$$

6-3　质心动力学方程

现选取固定地面坐标系$O_g x_g y_g z_g$作为质心动力学方程的参考坐标系。它相对于地球是固连的。因此，方程（3-16）成为

$$m\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} v_{xg} \\ v_{yg} \\ v_{zg} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{xg} + S_{e\cdot xg} + S_{c\cdot xg} \\ F_{yg} + S_{e\cdot yg} + S_{c\cdot yg} \\ F_{zg} + S_{e\cdot zg} + S_{c\cdot zg} \end{Bmatrix} \tag{3-65}$$

再次指出，这里v是飞行器质心对地球的相对速度。

首先考虑作用力**F**的分量

$$\begin{Bmatrix} F_{xg} \\ F_{yg} \\ F_{zg} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_t^g \begin{Bmatrix} P_{xt} \\ P_{yt} \\ P_{zt} \end{Bmatrix} + \mathbf{B}_q^g \begin{Bmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} - m\begin{Bmatrix} g_{xg} \\ g_{yg} \\ g_{zg} \end{Bmatrix} \tag{3-66}$$

其中P_{xt}、P_{yt}、P_{zt}为由发动机及内部操纵器（如燃气舵、游动小发动机）产生的力的分量；$-Q$、Y、Z为气流坐标系中气动力的分量；g_{xg}、g_{yg}、g_{zg}为重力加速度的分量。

由于重力加速度**g**的方向为指向地球中心，根据几何关系，不难得到它在地面坐标系中的分量

$$
\left.\begin{aligned}
g_{xg} &= -g\,\frac{x_g}{r} \\
g_{yg} &= -g\,\frac{y_g + r_D}{r} \\
g_{zg} &= -g\,\frac{z_g}{r} \\
g &= g_0 (r_D/r)^2
\end{aligned}\right\} \tag{3-67}
$$

其中r_D为地球平均半径

$$r = \sqrt{x_g^2 + (y_g + r_D)^2 + z_g^2} \tag{3-68}$$

为飞行器质心至地心的距离。

牵连惯性力

$$\mathbf{S}_e = -m\,\boldsymbol{\omega}_D \times (\boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}) = -m[(\boldsymbol{\omega}_D\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}_D - \omega_D^2\mathbf{r}] \tag{3-69}$$

而
$$\begin{pmatrix} \omega_{D\cdot xg} \\ \omega_{D\cdot yg} \\ \omega_{D\cdot zg} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_c^g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_D \end{pmatrix} = \omega_D \begin{pmatrix} \cos\varphi_0\sin\mu \\ \sin\varphi_0 \\ -\cos\varphi_0\cos\mu \end{pmatrix} \tag{3-70}$$

$$\begin{pmatrix} r_{xg} \\ r_{yg} \\ r_{zg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_g \\ y_g + r_D \\ z_g \end{pmatrix}$$

于是
$$\boldsymbol{\omega}_D \cdot \mathbf{r} = \omega_D r_\omega$$

其中
$$r_\omega = x_g\cos\varphi_0\sin\mu + (y_g + r_D)\sin\varphi_0 - z_g\cos\varphi_0\cos\mu \tag{3-71}$$

它相当于矢量 r 在地球旋转轴上的投影。把以上式子代入式（3-69）中，得到

$$\begin{pmatrix} S_{e\cdot xg} \\ S_{e\cdot yg} \\ S_{e\cdot zg} \end{pmatrix} = m\omega_D^2 \begin{pmatrix} -r_\omega\cos\varphi_0\sin\mu + x_g \\ -r_\omega\sin\varphi_0 - y_g - r_D \\ r_\omega\cos\varphi_0\cos\mu + z_g \end{pmatrix} \tag{3-72}$$

Coriolis 惯性力 $\mathbf{S}_c = -2m\,\boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{v}$ 的分量为

$$\begin{pmatrix} S_{c\cdot xg} \\ S_{c\cdot yg} \\ S_{c\cdot zg} \end{pmatrix} = -2m\omega_D \begin{pmatrix} \cos\varphi_0\sin\mu \\ \sin\varphi_0 \\ -\cos\varphi_0\cos\mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{xg} \\ v_{yg} \\ v_{zg} \end{pmatrix}$$

$$= 2m\omega_D \begin{pmatrix} -\cos\varphi_0\cos\mu v_{yg} - \sin\varphi_0 v_{zg} \\ \cos\varphi_0\cos\mu v_{xg} + \cos\varphi_0\sin\mu v_{zg} \\ \sin\varphi_0 v_{xg} - \cos\varphi_0\sin\mu v_{yg} \end{pmatrix} \tag{3-73}$$

最后，把式（3-60）、(3-61)、(3-62)、(3-63)、(3-64)、(3-66)、(3-67)、(3-68)、(3-72)、(3-73) 代入式（3-65）中，并且考虑到气动力Y、Z和Q可以表示成

$$\left.\begin{aligned} Y &= c_y^\alpha \alpha q S \\ Z &= c_z^\beta \beta q S = -c_y^\alpha \beta q S \\ Q &= c_x q S \end{aligned}\right\} \tag{3-74}$$

忽略α、β、γ、γ_s、ψ、ψ_s这些小量的乘积项，于是得到质心动力学方程如下：

$$\begin{aligned} m\frac{dv_{xg}}{dt} &= P_{xt}\cos\vartheta - P_{yt}\sin\vartheta - c_x qS\cos\theta - c_y^\alpha qS(\vartheta-\theta)\sin\theta - mg_0 r_D^2\frac{x_g}{r^3} + \\ &\quad + 2m\omega_D(-\cos\varphi_0\cos\mu v_{yg} - \sin\varphi_0 v_{zg}) + m\omega_D^2(-r_\omega\cos\varphi_0\sin\mu + x_g) \\ m\frac{dv_{yg}}{dt} &= P_{xt}\sin\vartheta + P_{yt}\cos\vartheta - c_x qS\sin\theta + c_y^\alpha qS(\vartheta-\theta)\cos\theta - mg_0 r_D^2\frac{y_g + r_D}{r^3} + \\ &\quad + 2m\omega_D(\cos\varphi_0\cos\mu v_{xg} + \cos\varphi_0\sin\mu v_{zg}) + m\omega_D^2(-r_\omega\sin\varphi_0 + y_g + r_D) \\ m\frac{dv_{zg}}{dt} &= -P_{xt}\psi + P_{zt} + c_x qS\psi_s - c_y^\alpha qS(\psi-\psi_s) - mg_0 r_D^2\frac{z_g}{r^3} + \\ &\quad + 2m\omega_D(\sin\varphi_0 v_{xg} - \cos\varphi_0\sin\mu v_{yg}) + m\omega_D^2(r_\omega\cos\varphi_0\cos\mu + z_g) \end{aligned} \tag{3-75}$$

其中的变量r_ω用式（3-71）描述。

6-4 转动动力学方程

弹道式火箭具有轴对称性，因而转动惯量$I_y = I_z$（以后用I表示），而惯性积$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$。此外，这类飞行器的燃料消耗很迅速，因而转动惯量的变化很显著。所以转动动力学方程应从第一章4-2中式（1-42）出发，并计及式（1-40）。考虑以上特点，转

动动力学方程成为

$$
\left.\begin{aligned}
&I_x\frac{d\omega_x}{dt}+\frac{dI_x}{dt}\omega_x=M_x\\
&I\frac{d\omega_y}{dt}+\frac{dI}{dt}\omega_y-(I-I_x)\omega_x\omega_z=M_y\\
&I\frac{d\omega_z}{dt}+\frac{dI}{dt}\omega_z+(I-I_x)\omega_x\omega_y=M_z
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}76)
$$

其中滚转力矩M_x包括气动阻尼力矩$M_{x1}^{\omega_x}\omega_x$和操纵力矩$M_{xp}$；

俯仰力矩M_z包括气动阻尼力矩$M_1^{\omega}\omega_z$、静气动力矩$M^{\alpha}\alpha$和操纵力矩M_{zp}；

偏航力矩M_y包括气动阻尼力矩$M_1^{\omega}\omega_y$、静气动力矩$-M^{\alpha}\beta$和操纵力矩M_{yp}。

为了分析的便利，把$-\dot{I}_x\omega_x$称为滚转内阻尼力矩，写成$M_{x2}^{\omega_x}\omega_x$；把$-\dot{I}\omega_y$称为偏航内阻尼力矩，写成$M_2^{\omega}\omega_y$；把$-\dot{I}\omega_z$称为俯仰内阻尼力矩，写成$M_2^{\omega}\omega_z$。文献[8]、[11]和[10]，从物理概念出发把上述内阻尼力矩解释成由于燃料和燃气在导管和尾喷管内流动和飞行器的偏航和俯仰角速度的耦合而引起的Coriolis效应的力矩，并且给出了相应的计算公式。与内阻尼力矩相对应，则把通常的气动阻尼力矩称为外阻尼力矩。

于是方程（3-76）可以改写如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&I_x\frac{d\omega_x}{dt}=(M_{x1}^{\omega_x}+M_{x2}^{\omega_x})\omega_x+M_{xp}\\
&I\frac{d\omega_y}{dt}=(I-I_x)\omega_x\omega_z-(M_1^{\omega}+M_2^{\omega})\omega_y-M^{\alpha}(\psi-\psi_s)+M_{yp}\\
&I\frac{d\omega_z}{dt}=(I-I_x)\omega_x\omega_y+(M_1^{\omega}+M_2^{\omega})\omega_z+M^{\alpha}(\vartheta-\theta)+M_{zp}
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}77)
$$

6-5 运动学方程

质心的运动学方程可以直接列出如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_g}{dt}=v_{xg}\\
&\frac{dy_g}{dt}=v_{yg}\\
&\frac{dz_g}{dt}=v_{zg}
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}78)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&v=\sqrt{v_{xg}^2+v_{yg}^2+v_{zg}^2}\\
&\psi_s=-v_{zg}/v\\
&\mathrm{tg}\,\theta=v_{yg}/v_{xg}
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}79)
$$

转动的运动学方程必须重新推导。机体坐标系相对于地面坐标系的转动角速度$\boldsymbol{\omega}_{t-g}$由沿轴$z_g$（见图3-13）的$\dot{\vartheta}$，沿轴$y'$的$\dot{\psi}$和沿轴$x_t$的$\dot{\gamma}$构成，而$\dot{\psi}$可以分解为沿轴$y_t$的$\dot{\psi}\cos\gamma$和沿轴$z_t$的$-\dot{\psi}\sin\gamma$。因此$\boldsymbol{\omega}_{t-g}$在机体坐标系中的分量为

$$\begin{pmatrix} \omega_{t-g\cdot xt} \\ \omega_{t-g\cdot yt} \\ \omega_{t-g\cdot zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi}\cos\gamma \\ -\dot{\psi}\sin\gamma \end{pmatrix} + \mathbf{B}_g^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} - \psi\dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} + \gamma\dot{\vartheta} \\ -\gamma\dot{\psi} + \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

求解上式，得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_{t-g\cdot xt} + \psi\omega_{t-g\cdot zt} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_{t-g\cdot yt} - \gamma\omega_{t-g\cdot zt} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{t-g\cdot zt} + \gamma\omega_{t-g\cdot yt} \end{aligned}\right\} \tag{3-80}$$

转动动力学方程（3-77）中 $\boldsymbol{\omega}$（即 $\boldsymbol{\omega}_t$ 的简写）是飞行器的绝对角速度，而运动学方程（3-80）中的 $\boldsymbol{\omega}_{t-g}$ 是飞行器相对于地球的角速度。它们之间的关系是

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_D + \boldsymbol{\omega}_{t-g}$$

所以在机体坐标系中的分量的关系为

$$\begin{pmatrix} \omega_{t-g\cdot xt} \\ \omega_{t-g\cdot yt} \\ \omega_{t-g\cdot zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} - \mathbf{B}_g^t \begin{pmatrix} \omega_{D\cdot xg} \\ \omega_{D\cdot yg} \\ \omega_{D\cdot zg} \end{pmatrix} \tag{3-81}$$

其中的 $\omega_{D\cdot xg}$ 等由式（3-70）给出。

当研究转动动力学特性时，有时可以忽略地球旋转效应，因而可以取

$$\begin{pmatrix} \omega_{t-g\cdot xt} \\ \omega_{t-g\cdot yt} \\ \omega_{t-g\cdot zt} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{3-82}$$

6-6　关于操纵力和操纵力矩的补充说明

动力学方程中出现的力 P_{yt}、P_{zt} 以及力矩 M_{xp}、M_{yp}、M_{zp} 是由操纵器产生的操纵力和操纵力矩。弹道式火箭上采用的操纵器通常是燃气舵或游动小发动机。现在以燃气舵为例来说明，虽然燃气舵在近代火箭中已几乎被淘汰了。

四个燃气舵的布局如图3-15所示。舵 2 和 4 永远同步偏转，起升降舵作用；舵 1 和 3，当同向偏转时起方向舵作用，当反向偏转时起副翼作用。也就是说，等效的升降舵、方向舵和副翼的偏转角为

$$\left.\begin{aligned} \delta_z &= \delta_2 = \delta_4 \\ \delta_y &= \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3) \\ \delta_x &= \frac{1}{2}(\delta_3 - \delta_1) \end{aligned}\right\} \tag{3-83}$$

这里 δ_2 和 δ_4 以向下偏转为正。δ_1 和 δ_3 以向右偏转为正。

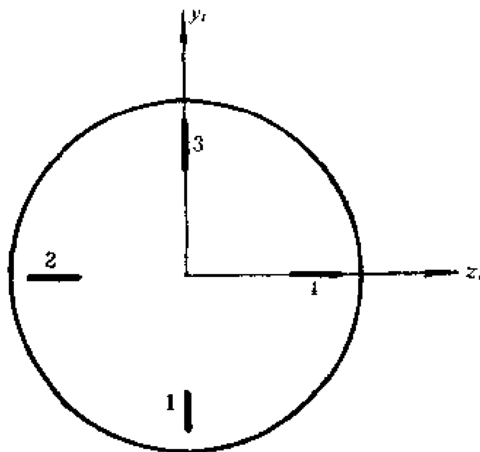


图3-15　操纵器的布局图（后视图）

它们产生的力可以表示为

$$\left.\begin{aligned} P_{yt} &= 2A\delta_2 \\ P_{zt} &= -A(\delta_1+\delta_3) \end{aligned}\right\} \tag{3-84}$$

其中A表示舵偏转单位角度时产生的法向力。

它们产生的力矩可以表示为

$$\left.\begin{aligned} M_{zp} &= -2Al_c\delta_2 \\ M_{yp} &= -Al_c(\delta_1+\delta_3) \\ M_{xp} &= -Ae_c(\delta_3-\delta_1) \end{aligned}\right\} \tag{3-85}$$

其中l_c是从舵面中心到重心的纵向距离；

e_c是从舵面中心到纵轴的距离。

6-7 小结

本节中考虑到典型弹道式火箭的主动段的固有特点，计及地球曲率和地球旋转，建立了它的运动方程组，包括式（3-71）、（3-75）、（3-77）、（3-78）、（3-79）、（3-80）、（3-81）、（3-84）、（3-85）。只要再补充相应的控制方程，就可以计算和分析弹道式火箭的主动段的运动规律。可以看出，这些方程与本章§1～§5针对一般超高速飞行器而建立的运动方程是很不相同的。

在实际进行弹道式火箭的主动段的计算和分析时，还可以根据不同阶段的具体条件，把方程作不同程度的简化。关于这个问题，在文献[10]中有详细的论述。

第四章　飞行器的小扰动线化方程

第二和第三章建立的运动方程颇为全面地描述了飞行器的运动。只要具备足够完全的空气动力数据、发动机数据以及控制规律，求解那些方程就能得到飞行器的运动过程。包括飞行器质心的移动和绕质心的转动。因而那些方程可以用来不仅研究飞行航迹问题，而且研究稳定性和操纵性问题。但是那些方程都是变系数、非线性的方程，绝大多数情况下得不到解析解，只能用数值法求解，即在具体的数值条件下得到具体的数值结果。这样，就不容易归纳出带有普遍意义的一般性规律。

为了便于研究飞行器的稳定性和操纵性，通常要求把运动方程化成常系数线性方程组(包括微分方程和代数方程)，这样就可能用解析法求解或进行解析研究，并且从中归纳出一些普遍规律，提出一些飞行品质指标，作为飞行器设计的指南。

本章的目的是进行飞行器运动方程的线性化，并且对线化方程的各种形式进行研究和讨论。

§1　基本概念

1-1　基准运动和受扰运动

飞行器在理想的条件下，不受任何外界干扰，按预定规律进行的运动称为基准运动或未扰动运动。基准运动参数用下标＊表示，例如v_*，α_*，θ_*。

飞行器受到扰动后发生的运动称为受扰运动或扰动运动。这种扰动可能是由外界条件(例如突风)引起的，也可能是由操纵面的突然偏转或其它非理想因素引起的。受扰运动的参数，不附加任何特殊标记，例如v，α，θ。

必须指出，在某些情况下，基准运动的选取是人为的，基准运动与受扰运动的划分也带有一定程度的人为因素。但在大多数情况下，这样的划分是自然的、公认一致的。

受扰运动参数与基准运动参数之差，称为运动参数的偏差或偏量，利用前置符号Δ表示。例如

$$\Delta v=v-v_*,\ \Delta\alpha=\alpha-\alpha_*,\ \Delta\theta=\theta-\theta_* \tag{1-1}$$

本章要建立的方程是在一定的条件下得到的以微小偏量为对象的线性化方程，所以称为小扰动线性化方程。与此相对地，把第二、第三章建立的未经线化处理的原始方程称为全量方程。

1-2　基本假设

在本章中仅打算把平面大地和平静大气条件下的有纵对称平面的刚性飞行器的运动方程予以线性化。至于考虑地球曲率和旋转时飞行器的运动方程的线性化，在必要时读者可以参照本章的原理和方法来完成；在非平静大气中飞行器的运动方程的线性化问题将在第五章中

讲述。因此，我们已经隐含地采用了下列假设。

1．认为大地是不旋转的、平面的。

2．认为大气是静止不动的。但当需要研究大气扰动对飞行器运动的影响时，可以把大气扰动所产生的力和力矩作为输入量加到运动方程中来（参看第五章§4）。

3．认为飞行器是刚体，不考虑结构弹性变形、操纵面转动的惯性影响以及转动部件的陀螺效应。

4．认为在几何外形、质量分布和气动特性方面都是对平面Ox_ty_t对称的。

此外，还作如下三点补充假设。

5．在基准（未受扰）运动中飞行器的纵对称平面处于铅垂状态，而且飞行速度矢量也在纵对称平面内，因而$\gamma_*=0$，$\beta_*=0$，$v_{zt*}=0$。只要在选取地面坐标系时使它的平面x_Dy_D与基准运动平面相重合，就有$\psi_*=\psi_{s*}=z_{D*}=0$。

6．假设基准运动是定常的，即基准运动参数不随时间而变化。实际上，只要基准运动参数的变化不太剧烈，则在所研究的扰动运动的短时间内就可以近似地认为基准运动是定常的。这样处理法称为系数冻结法。

7．假设在扰动运动中运动参数的偏量（例如Δv、$\Delta\alpha$、$\Delta\theta$）足够小，以致这些偏量的二阶及更高阶的量是可忽略的。这就是通常所说的小扰动假设。

一般说来，在小扰动假设下就能把飞行器运动方程进行线性化。再加上上述其它假设，就可使线性化运动方程分离为纵向和横侧两组彼此独立的方程，并且是常系数的线性方程（详见§3）。但是，如果基准运动不是定常的、而是非定常运动，则线性化方程就是变系数的方程。

对飞行器运动方程的线性化尽管作了这么多限制，但实践表明，线性化运动方程的适用范围仍然是相当广阔的。至于这些条件究竟可以放宽到什么程度，例如，运动参数偏量可以大到什么程度，这个问题很难作出明确的答复，这只能由实践来检验。在理论研究阶段，可以通过把全量方程的计算结果与线性化方程的计算结果进行比较，来判定线性化方程的适用性。

当然，也有一些飞行情况是不能用线性化方程来研究的，例如飞机的失速后尾旋（这时扰动是相当大的），用固体火箭发动机进行加速的飞行阶段（这时基准运动参数变化太剧烈）。这些飞行情况还是最好用全量方程进行研究，不要勉强采用线性化的方法。

1-3 方程线性化的一般方法

飞行器的任何一个运动方程（微分的或代数的）可以表示成如下的一般形式：

$$f(x, y, \cdots, w)=0 \tag{4-2}$$

其中的x，y，…，w是运动参数或它们的时间导数。

根据前述，运动参数可以表示成基准量与偏量之和

$$x=x_*+\Delta x,\ y=y_*+\Delta y,\ \cdots,\ w=w_*+\Delta w$$

于是方程（4-2）写成

$$f(x_*+\Delta x, y_*+\Delta y, \cdots, w_*+\Delta w)=0$$

在基准点（x_*，y_*，…，w_*）处展开成Taylor级数，并且忽略二阶及更高阶小量，则写成

$$f(x_*, y_*, \cdots, w_*)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_*\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_*\Delta y+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_*\Delta w=0 \qquad (4\text{-}3)$$

基准运动也应满足运动方程（4-2），即

$$f(x_*, y_*, \cdots, w_*)=0 \qquad (4\text{-}4)$$

把式（4-3）减去式（4-4），得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_*\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_*\Delta y+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_*\Delta w=0 \qquad (4\text{-}5)$$

这是任何一个运动方程（4-2）的线性化结果，也是运动方程线性化的一般公式。

§2 力和力矩的偏量和导数

2-1 力和力矩的偏量的分析

运动方程线性化时，将出现力和力矩的偏量，即力和力矩在受扰运动中的值与在未扰运动中的值之差值。现在考虑这些偏量如何表达。

设某个力或力矩A是若干个变量的函数

$$A=A(a, b, \cdots, g)$$

其中的$a, b, \cdots, g$与方程（4-2）中的$x, y, \cdots, w$可能有一部分是重合的。一般地说，A的偏量应为

$$\Delta A=\frac{\partial A}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial A}{\partial b}\Delta b+\cdots+\frac{\partial A}{\partial g}\Delta g \qquad (4\text{-}6)$$

或写成

$$\Delta A=A^a\Delta a+A^b\Delta b+\cdots+A^g\Delta g \qquad (4\text{-}6')$$

其中的偏导数是在基准点（$x_*, y_*, \cdots, w_*$）取的，即

$$A^a=\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_*=\frac{\partial A}{\partial a}(a_*, b_*, \cdots, g_*)$$

对于作用在飞行器上的力和力矩来说，所取的基准点（参考点）就是基准飞行状态，即未扰动运动状态。前已指出，把所考虑的基准飞行状态限定为铅垂平面内的对称定常直线飞行。根据空气动力学理论和实验数据的分析，并结合有关的物理概念，可以知道，在这样的基准点的邻域内，作用的力和力矩取决于哪些参数。

发动机推力P取决于速度v、高度h以及油门开度δ_p，即

$$P=P(v, h, \delta_p)$$

因此它的偏量为

$$\Delta P=P^v\Delta v+P^h\Delta h+P^{\delta_p}\Delta\delta_p$$

但是由于发动机系统（特别是涡轮喷气发动机）有相当大的惯性，从油门杆位移到推力变化之间有相当大的时间延迟，所以用$P^{\delta_p}\Delta\delta_p$表示是不够真实的。最好用可控制的推力偏量$\Delta P_c$来代替它，于是

$$\Delta P=P^v\Delta v+P^h\Delta h+\Delta P_c \qquad (4\text{-}7)$$

气动阻力Q通常取决于v、h、迎角α、侧滑角β、升降舵偏转角δ_z等。由于气动特性的

对称性，在$\beta=0$（基准点状态）处$(\partial Q/\partial \beta)_{\beta=0}=0$。因此

$$\Delta Q=Q^v\Delta v+Q^h\Delta h+Q^\alpha\Delta\alpha+Q^{\delta_z}\Delta\delta_z \tag{4-8}$$

其中的Q^{δ_z}项有时也可以忽略。

升力Y主要取决于v、h、α，其次也随δ_z而变，更严格地说，还受迎角变化率$\dot{\alpha}$和俯仰角速度ω_z的影响，因此

$$\Delta Y=Y^v\Delta v+Y^h\Delta h+Y^\alpha\Delta\alpha+Y^{\delta_z}\Delta\delta_z+Y^{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha}+Y^{\omega_z}\Delta\omega_z \tag{4-9}$$

在大多数情况下可以忽略$Y^{\dot{\alpha}}$和Y^{ω_z}，在粗略分析中有时还可以忽略Y^{δ_z}。

重力mg。严格地说，重力加速度随高度h而变化，但在扰动运动范围内这个变化极微小，不必考虑，因此可以认为

$$\Delta(mg)=0 \tag{4-10}$$

俯仰力矩M_z取决于v、h、α、$\dot{\alpha}$、ω_z、δ_z，因此

$$\Delta M_z=M_z^v\Delta v+M_z^h\Delta h+M_z^\alpha\Delta\alpha+M_z^{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha}+M_z^{\omega_z}\Delta\omega_z+M_z^{\delta_z}\Delta\delta_z \tag{4-11}$$

对于鸭式飞行器，还必须加上$M_z^{\dot{\delta}_z}\Delta\dot{\delta}_z$项。

气动侧力Z取决于v、h、侧滑角β、滚转和偏航角速度ω_x、ω_y，以及方向舵偏角δ_y，因此本来应该写

$$\Delta Z=Z^v\Delta v+Z^h\Delta h+Z^\beta\Delta\beta+Z^{\omega_x}\Delta\omega_x+Z^{\omega_y}\Delta\omega_y+Z^{\delta_y}\Delta\delta_y$$

但由于横侧参数β、ω_x、ω_y、δ_x、δ_y等的小量变化并不引起纵向参数v、h的变化（详见后述关于纵向和横侧运动的分离），故可以省略前两项，写出

$$\Delta Z=Z^\beta\Delta\beta+Z^{\omega_x}\Delta\omega_x+Z^{\omega_y}\Delta\omega_y+Z^{\delta_y}\Delta\delta_y \tag{4-12}$$

在多数情况下还可以忽略Z^{ω_x}和Z^{ω_y}。

滚转力矩M_x和偏航力矩M_y除了取决于v、h以外，主要取决于β、ω_x、ω_y、δ_y以及副翼偏角δ_x。同样地在偏量表达式中不考虑v和h的影响，写出

$$\Delta M_x=M_x^\beta\Delta\beta+M_x^{\omega_x}\Delta\omega_x+M_x^{\omega_y}\Delta\omega_y+M_x^{\delta_x}\Delta\delta_x+M_x^{\delta_y}\Delta\delta_y \tag{4-13}$$

$$\Delta M_y=M_y^\beta\Delta\beta+M_y^{\omega_x}\Delta\omega_x+M_y^{\omega_y}\Delta\omega_y+M_y^{\delta_x}\Delta\delta_x+M_y^{\delta_y}\Delta\delta_y \tag{4-14}$$

2-2 力和力矩的导数

现在来讨论在上一小节中出现的力和力矩对运动参数的偏导数，例如P^v、Y^α、M_x^β等。按照性质，把它们分为若干组。

第一组 推力的导数

发动机推力对速度和高度的导数P^v和P^h，可直接根据发动机特性曲线$P(v, h)$用数值微分法在基准点（v_*，h_*）处求出，不要再化成其它派生形式。

第二组 气动力和力矩对速度v的导数

首先考虑Q^v。以前已指出，气动阻力Q表示成

$$Q=c_x\frac{1}{2}\rho v^2 S$$

v的变化不仅直接影响速压$\frac{1}{2}\rho v^2$，而且通过Mach数影响c_x（至于通过Reynolds数对c_x的影响则可以忽略）。于是

$$Q^v=\frac{\partial c_x}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial v}\cdot\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S+c_{x*}\rho_* v_* S$$

由于$M=v/a$，故$\partial M/\partial v=1/a_*$。用$c_x^M$表示$\partial c_x/\partial M$。注意到$v_*/a_*=M_*$。所以

$$Q^v=\frac{\partial Q}{\partial v}=\rho_* v_* S\left(\frac{1}{2}c_x^M M_*+c_{x*}\right) \qquad (4\text{-}15a)$$

同样地得到

$$Y^v=\frac{\partial Y}{\partial v}=\rho_* v_* S\left(\frac{1}{2}c_y^M M_*+c_{y*}\right) \qquad (4\text{-}15b)$$

$$M_z^v=\frac{\partial M_z}{\partial v}=\rho_* v_* S b_A\left(\frac{1}{2}m_z^M M_*+m_{z*}\right) \qquad (4\text{-}15c)$$

这里的c_x^M、c_y^M、m_z^M都可以根据气动曲线用数值微分法求得。

第三组　气动力和力矩对高度h的导数

仍以Q为例。h的变化，不仅直接影响空气密度ρ，而且通过音速a的变化影响M数进而影响阻力系数c_x。因此有

$$Q^h=\frac{\partial c_x}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial h}\cdot\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S+\frac{\partial \rho}{\partial h}c_{x*}\frac{1}{2}v_*^2 S$$

由于$M=v/a$，故

$$\frac{\partial M}{\partial a}=-\frac{v_*}{a_*^2}=-\frac{M_*}{a_*}$$

代入，得

$$Q^h=\frac{\partial Q}{\partial h}=\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S\left(-c_x^M M_*\frac{a^h}{a_*}+c_{x*}\frac{\rho^h}{\rho_*}\right) \qquad (4\text{-}16a)$$

同样地得到

$$Y^h=\frac{\partial Y}{\partial h}=\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S\left(-c_y^M M_*\frac{a^h}{a_*}+c_{y*}\frac{\rho^h}{\rho_*}\right) \qquad (4\text{-}16b)$$

$$M_z^h=\frac{\partial M_z}{\partial h}=\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S b_A\left(-m_z^M M_*\frac{a^h}{a_*}+m_{z*}\frac{\rho^h}{\rho_*}\right) \qquad (4\text{-}16c)$$

这里的梯度a^h和ρ^h可按标准大气的公式导出。已经知道，标准大气的公式

$$\rho=\begin{cases}1.2250\left(1-\dfrac{h}{44331}\right)^{4.2559} & h\leqslant 11000\\[2ex] 0.36391\exp\left(-\dfrac{h-11000}{6341.6}\right) & 11000<h\leqslant 20000\end{cases}\quad [\text{kg/m}^3]\qquad [\text{m}]$$

$$a=\begin{cases}20.047\sqrt{288.15-0.0065h} & h\leqslant 11000\\ 295.07 & 11000<h\leqslant 20000\end{cases}\quad [\text{m/s}]\qquad [\text{m}]$$

由此可以求出

$$\frac{\dfrac{\partial\rho}{\partial h}}{\rho}=\begin{cases}-\dfrac{4.2559}{44331-h} & h\leqslant 11000\\[2ex] -\dfrac{1}{6341.6} & 11000<h\leqslant 20000\end{cases}\quad [1/\text{m}]\qquad [\text{m}]$$

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial h}}{a}=\begin{cases}-\dfrac{0.0065}{2(288.15-0.0065h)} & [1/m] \quad h\leqslant 11000 \\ 0 & \quad 11000<h\leqslant 20000\end{cases} \quad [m] \tag{4-17}$$

第四组　气动力和力矩对角度的导数（静导数）

这些导数可以直接写出如下：

$$Q^{\alpha}=\frac{\partial Q}{\partial \alpha}=c_x^{\alpha}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S \tag{4-18a}$$

$$Q^{\delta_z}=\frac{\partial Q}{\partial \delta_z}=c_x^{\delta_z}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S \tag{4-18b}$$

$$Y^{\alpha}=\frac{\partial Y}{\partial \alpha}=c_y^{\alpha}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S \tag{4-18c}$$

$$Y^{\delta_z}=\frac{\partial Y}{\partial \delta_z}=c_y^{\delta_z}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S \tag{4-18d}$$

$$M_z^{\alpha}=\frac{\partial M_z}{\partial \alpha}=m_z^{\alpha}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S b_A \tag{4-18e}$$

$$M_z^{\delta_z}=\frac{\partial M_z}{\partial \delta_z}=m_z^{\delta_z}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S b_A \tag{4-18f}$$

$$Z^{\beta}=\frac{\partial Z}{\partial \beta}=c_z^{\beta}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S \tag{4-18g}$$

$$Z^{\delta_y}=\frac{\partial Z}{\partial \delta_y}=c_z^{\delta_y}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S \tag{4-18h}$$

$$M_x^{\beta}=\frac{\partial M_x}{\partial \beta}=m_x^{\beta}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S l \tag{4-18i}$$

$$M_x^{\delta_x}=\frac{\partial M_x}{\partial \delta_x}=m_x^{\delta_x}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S l \tag{4-18j}$$

$$M_x^{\delta_y}=\frac{\partial M_x}{\partial \delta_y}=m_x^{\delta_y}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S l \tag{4-18k}$$

$$M_y^{\beta}=\frac{\partial M_y}{\partial \beta}=m_y^{\beta}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S l \tag{4-18l}$$

$$M_y^{\delta_x}=\frac{\partial M_y}{\partial \delta_x}=m_y^{\delta_x}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S l \tag{4-18m}$$

$$M_y^{\delta_y}=\frac{\partial M_y}{\partial \delta_y}=m_y^{\delta_y}\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S l \tag{4-18n}$$

其中　　$c_x^{\alpha}=\partial c_x/\partial \alpha$，…。

第五组　纵向气动力和力矩对角速度的导数（纵向动导数）

首先看 $Y^{\dot{\alpha}}$

$$Y^{\dot{\alpha}}=\frac{\partial Y}{\partial \dot{\alpha}}=\frac{\partial c_y}{\partial\left(\dot{\alpha}\frac{b_A}{v_*}\right)}\cdot\frac{1}{2}\rho_* v_*^2 S\frac{b_A}{v_*}$$

引入无量纲变化率

$$\bar{\dot{\alpha}}=\dot{\alpha}\frac{b_A}{v_*}$$

且引用导数符号

$$c_y^{\dot{\alpha}}=\frac{\partial c_y}{\partial \bar{\dot{\alpha}}}$$

于是

$$Y^{\dot{\alpha}}=\frac{\partial Y}{\partial \dot{\alpha}}=c_y^{\dot{\alpha}}\frac{1}{2}\rho_* v_* S b_A \tag{4-19a}$$

同样地，有

$$Y^{\omega_z}=\frac{\partial Y}{\partial \omega_z}=c_y^{\omega_z}\frac{1}{2}\rho_* v_* S b_A \tag{4-19b}$$

$$M_z^{\dot{\alpha}}=\frac{\partial M_z}{\partial \dot{\alpha}}=m_z^{\dot{\alpha}}\frac{1}{2}\rho_* v_* S b_A^2 \tag{4-19c}$$

$$M_z^{\omega_z}=\frac{\partial M_z}{\partial \omega_z}=m_z^{\omega_z}\frac{1}{2}\rho_* v_* S b_A^2 \tag{4-19d}$$

其中

$$m_z^{\omega_z}=\frac{\partial m_z}{\partial \bar{\omega}_z},\qquad m_z^{\dot{\alpha}}=\frac{\partial m_z}{\partial \bar{\dot{\alpha}}},$$

$$c_y^{\omega_z}=\frac{\partial c_y}{\partial \bar{\omega}_z},\qquad \bar{\omega}_z=\omega_z\frac{b_A}{v_*}$$

第六组　横侧气动力和力矩对角速度的导数（横侧动导数）

定义无量纲角速度

$$\bar{\omega}_x=\frac{\omega_x l}{2v},\qquad \bar{\omega}_y=\frac{\omega_y l}{2v}$$

并且引入导数符号

$$m_x^{\omega_x}=\frac{\partial m_x}{\partial \bar{\omega}_x},\qquad m_x^{\omega_y}=\frac{\partial m_x}{\partial \bar{\omega}_y}$$

$$m_y^{\omega_x}=\frac{\partial m_y}{\partial \bar{\omega}_x},\qquad m_y^{\omega_y}=\frac{\partial m_y}{\partial \bar{\omega}_y}$$

$$c_z^{\omega_x}=\frac{\partial c_z}{\partial \bar{\omega}_x},\qquad c_z^{\omega_y}=\frac{\partial c_z}{\partial \bar{\omega}_y}$$

于是横侧动导数可表示为

$$Z^{\omega_x}=\frac{\partial Z}{\partial \omega_x}=c_z^{\omega_x}\frac{1}{4}\rho_* v_* S l \tag{4-20a}$$

$$Z^{\omega_y}=\frac{\partial Z}{\partial \omega_y}=c_z^{\omega_y}\frac{1}{4}\rho_* v_* S l \tag{4-20b}$$

$$M_x^{\omega_x}=\frac{\partial M_x}{\partial \omega_x}=m_x^{\omega_x}\,\frac{1}{4}\,\rho_* v_* S l^2 \tag{4-20c}$$

$$M_x^{\omega_y}=\frac{\partial M_x}{\partial \omega_y}=m_x^{\omega_y}\,\frac{1}{4}\,\rho_* v_* S l^2 \tag{4-20d}$$

$$M_y^{\omega_x}=\frac{\partial M_y}{\partial \omega_x}=m_y^{\omega_x}\,\frac{1}{4}\,\rho_* v_* S l^2 \tag{4-20e}$$

$$M_y^{\omega_y}=\frac{\partial M_y}{\partial \omega_y}=m_y^{\omega_y}\,\frac{1}{4}\,\rho_* v_* S l^2 \tag{4-20f}$$

以上仅列出了气动力和力矩的导数的表达式，而且在表达式中又引入了气动力系数和气动力矩系数的导数（例如c_y^α、$m_z^{\omega_z}$），这些导数通常称为气动导数。本书不打算进一步研讨这些气动导数。气动导数的研究是飞行器空气动力学的重要课题。通常包含以下主要内容：

1. 各气动导数的物理本质，产生机理；
2. 各气动导数的工程估算方法和实验方法；
3. 各气动导数与飞行器几何外形、部件参数的关系，以及随M数的变化。

§3 运动方程的綫性化

3-1 动力学方程的线性化

质心移动的动力学方程（或称力方程）采用航迹坐标系中的方程组（2-29）的头两个方程和机体坐标系中的方程组（2-31）的第三个方程。

首先进行式（2-29）的第一个方程

$$m\frac{dv}{dt}=P\cos(\alpha+\varphi_p)\cos\beta-Q-mg\sin\theta$$

的线性化。按一般公式（4-5）处理，并注意m和φ_p是常数，有

$$m\frac{d\Delta v}{dt}=\Delta P\cos(\alpha_*+\varphi_p)\cos\beta_*-P_*\sin(\alpha_*+\varphi_p)\Delta\alpha\cos\beta_*-$$
$$-P_*\cos(\alpha_*+\varphi_p)\sin\beta_*\Delta\beta-\Delta Q-mg\cos\theta_*\Delta\theta.$$

由于基准状态的$\beta_*=0$，且把ΔP和ΔQ的表达式（4-7）和（4-8）代入，得到

$$m\frac{d\Delta v}{dt}=(P^v\Delta v+P^h\Delta h+\Delta P_c)\cos(\alpha_*+\varphi_p)-P_*\sin(\alpha_*+\varphi_p)\Delta\alpha-$$
$$-(Q^v\Delta v+Q^h\Delta h+Q^\alpha\Delta\alpha+Q^{\delta_z}\Delta\delta_z)-mg\cos\theta_*\Delta\theta \tag{4-21}$$

用同样的方法把式(2-29)的第二个方程线性化，考虑到基准运动的$(d\theta/dt)_*=0$，$\beta_*=0$，$\gamma_{c*}=0$，$Z_*=0$，并且把ΔP和ΔY的表达式代入，最后得到

$$mv_*\frac{d\Delta\theta}{dt}=(P^v\Delta v+P^h\Delta h+\Delta P_c)\sin(\alpha_*+\varphi_p)+P_*\cos(\alpha_*+\varphi_p)\Delta\alpha+$$
$$+(Y^v\Delta v+Y^h\Delta h+Y^\alpha\Delta\alpha+Y^{\dot\alpha}\Delta\dot\alpha+Y^{\omega_z}\Delta\omega_z+Y^{\delta_z}\Delta\delta_z)+$$
$$+mg\sin\theta_*\Delta\theta \tag{4-22}$$

把式（2-31）的第三个方程线性化：

$$m\left(\frac{d\Delta v_{zt}}{dt}+\Delta\omega_x v_{yt*}+\omega_{x*}\Delta v_{yt}-\Delta\omega_y v_{xt*}-\omega_{y*}\Delta v_{xt}\right)$$

$$=-\Delta Q\sin\beta_*-Q_*\cos\beta_*\Delta\beta+\Delta Z\cos\beta_*-Z_*\sin\beta_*\Delta\beta-$$

$$-mg\sin\vartheta_*\Delta\vartheta\sin\gamma_*+mg\cos\vartheta_*\cos\gamma_*\Delta\gamma$$

由于$\omega_{x*}=\omega_{y*}=\beta_*=\gamma_*=Z_*=0$，于是

$$m\left(\frac{d\Delta v_{zt}}{dt}+v_{yt*}\Delta\omega_x-v_{xt*}\Delta\omega_y\right)=-Q_*\Delta\beta+\Delta Z+mg\cos\vartheta_*\Delta\gamma$$

由式（2-55）可见

$$\Delta v_{zt}\approx v_*\Delta\beta,\quad v_{xt*}\approx v_*\ (\because v_{yt*}<<v_{xt*}),$$

$$v_{yt*}\approx-v_{xt*}\alpha_*\approx-v_*\alpha_*,$$

并且采用ΔZ的表达式（4-12），得到

$$mv_*\frac{d\Delta\beta}{dt}-mv_*\alpha_*\Delta\omega_x-mv_*\Delta\omega_y$$

$$=-Q_*\Delta\beta+Z^\beta\Delta\beta+Z^{\omega_x}\Delta\omega_x+Z^{\omega_y}\Delta\omega_y+Z^{\delta_y}\Delta\delta_y+$$

$$+mg\cos\vartheta_*\Delta\gamma \tag{4-23}$$

绕质心转动的动力学方程（或称力矩方程）的原始形式是式（2-40）。方程右端的力矩包括气动力矩和推力矩，假设发动机安装是对称的，它不产生滚转和偏航力矩[见式(2-15)]，于是

$$\sum M_x=M_x,\ \sum M_y=M_y,\ \sum M_z=M_z-Pe_p$$

其中 M_x、M_y、M_z是气动力矩，$-Pe_p$是发动机产生的俯仰力矩。

首先把式（2-40）的第一个方程线性化

$$I_x\frac{d\Delta\omega_x}{dt}-(I_z-I_y)(\Delta\omega_y\omega_{z*}+\omega_{y*}\Delta\omega_z)+$$

$$+I_{xy}\left(\Delta\omega_z\omega_{x*}+\omega_{z*}\Delta\omega_x-\frac{d\Delta\omega_y}{dt}\right)=\Delta M_x$$

由于$\omega_{z*}=\omega_{y*}=\omega_{x*}=0$，并考虑$\Delta M_x$的表达式（4-13），最后得到

$$I_x\frac{d\Delta\omega_x}{dt}-I_{xy}\frac{d\Delta\omega_y}{dt}=M_x^\beta\Delta\beta+M_x^{\omega_x}\Delta\omega_x+M_x^{\omega_y}\Delta\omega_y+$$

$$+M_x^{\delta_x}\Delta\delta_x+M_x^{\delta_y}\Delta\delta_y \tag{4-24}$$

同样地进行式（2-40）的第二和第三个方程的线性化，结果是

$$I_y\frac{d\Delta\omega_y}{dt}-I_{xy}\frac{d\Delta\omega_x}{dt}=M_y^\beta\Delta\beta+M_y^{\omega_x}\Delta\omega_x+M_y^{\omega_y}\Delta\omega_y+$$

$$+M_y^{\delta_x}\Delta\delta_x+M_y^{\delta_y}\Delta\delta_y \tag{4-25}$$

$$I_z\frac{d\Delta\omega_z}{dt}=(M_z^v\Delta v+M_z^h\Delta h+M_z^\alpha\Delta\alpha+M_z^{\dot\alpha}\Delta\dot\alpha+M_z^{\omega_z}\Delta\omega_z+M_z^{\delta_z}\Delta\delta_z)$$

$$-(P^v\Delta v+P^h\Delta h+\Delta P_c)e_p \tag{4-26}$$

3-2 运动学方程和几何关系式的线性化

首先把运动学方程（2-43）的第一式线性化

$$\frac{d\Delta x_D}{dt}=\Delta v\cos\theta_*\cos\psi_{s*}-v_*\sin\theta_*\Delta\theta\cos\psi_{s*}-v_*\cos\theta_*\sin\psi_{s*}\Delta\psi_s$$

由于 $\psi_{s*}=0$，所以

$$\frac{d\Delta x_D}{dt}=\cos\theta_*\Delta v-v_*\sin\theta_*\Delta\theta \tag{4-27}$$

同样地进行第二和第三个方程的线性化，在第二方程中用 dh/dt 代替了 dy_D/dt。结果是

$$\frac{d\Delta h}{dt}=\sin\theta_*\Delta v+v_*\cos\theta_*\Delta\theta \tag{4-28}$$

$$\frac{d\Delta z_D}{dt}=-v_*\cos\theta_*\Delta\psi_s \tag{4-29}$$

转动运动学方程（2-46）第一式的线性化

$$\frac{d\Delta\gamma}{dt}=\Delta\omega_x-\Delta\mathrm{tg}\vartheta(\omega_{y*}\cos\gamma_*-\omega_{z*}\sin\gamma_*)-$$

$$-\mathrm{tg}\vartheta_*(\Delta\omega_y\cos\gamma_*-\omega_{y*}\sin\gamma_*\Delta\gamma-\Delta\omega_z\sin\gamma_*-\omega_{z*}\cos\gamma_*\Delta\gamma)$$

由于 $\omega_{x*}=\omega_{y*}=\omega_{z*}=\gamma_*=0$，所以得到

$$\frac{d\Delta\gamma}{dt}=\Delta\omega_x-\mathrm{tg}\vartheta_*\Delta\omega_y \tag{4-30}$$

同样地，第二和第三式的线性化结果是

$$\frac{d\Delta\psi}{dt}=\frac{1}{\cos\vartheta_*}\Delta\omega_y \tag{4-31}$$

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt}=\Delta\omega_z \tag{4-32}$$

几何关系式（2-48）的线性化

$$\cos\beta_*\Delta\beta=[\cos\gamma_*\Delta\gamma\sin\vartheta_*\cos(\psi-\psi_s)_*+\sin\gamma_*\cos\vartheta_*\Delta\vartheta\cos(\psi-\psi_s)_*-$$

$$-\sin\gamma_*\sin\vartheta_*\sin(\psi-\psi_s)_*(\Delta\psi-\Delta\psi_s)-\sin\gamma_*\Delta\gamma\sin(\psi-\psi_s)_*+$$

$$+\cos\gamma_*\cos(\psi-\psi_s)_*(\Delta\psi-\Delta\psi_s)]\cos\theta_*-[\sin\gamma_*\sin\vartheta_*\cos(\psi-\psi_s)_*+$$

$$+\cos\gamma_*\sin(\psi-\psi_s)_*]\sin\theta_*\Delta\theta-\cos\gamma_*\Delta\gamma\cos\vartheta_*\sin\theta_*+$$

$$+\sin\gamma_*\sin\vartheta_*\Delta\vartheta\sin\theta_*-\sin\gamma_*\cos\vartheta_*\cos\theta_*\Delta\theta$$

由于 $\beta_*=\gamma_*=\psi_*=\psi_{s*}=0$，故

$$\Delta\beta=(\sin\vartheta_*\Delta\gamma+\Delta\psi-\Delta\psi_s)\cos\theta_*-\cos\vartheta_*\sin\theta_*\Delta\gamma$$

$$=(\Delta\psi-\Delta\psi_s)\cos\theta_*+\sin(\vartheta_*-\theta_*)\Delta\gamma$$

由于 $\vartheta_*-\theta_*=\alpha_*$，最后得到

$$\Delta\beta=\cos\theta_*(\Delta\psi-\Delta\psi_s)+\sin\alpha_*\Delta\gamma \tag{4-33}$$

类似地，式（2-49）和式（2-51）的线性化结果是

$$\Delta\alpha=\Delta\vartheta-\Delta\theta \tag{4-34}$$

$$\Delta\gamma_s=\mathrm{tg}\theta_*\Delta\beta+\frac{\cos\vartheta_*}{\cos\theta_*}\Delta\gamma \tag{4-35}$$

3-3 纵向方程和横侧方程的划分

至此，已经得到了所需要的全部线性化方程，即式（4-21）至式（4-35）。仔细观察一下就能发现，这些方程可以划分成互相独立的两组。

方程（4-21）、（4-22）、（4-26）、（4-27）、（4-28）、（4-32）、（4-34）只包含纵向运动变量Δv、$\Delta\theta$、Δh、Δx_D、$\Delta\alpha$、$\Delta\omega_z$、$\Delta\vartheta$、ΔP_c、$\Delta\delta_z$。这些方程称为纵向小扰动运动方程。

方程（4-23）、（4-24）、(4-25)、(4-29)、（4-30）、（4-31）、（4-33）、(4-35）只包含横侧运动变量$\Delta\beta$、$\Delta\gamma$、$\Delta\omega_x$、$\Delta\omega_y$、$\Delta\psi$、$\Delta\psi_s$、Δz_D、$\Delta\gamma_s$、$\Delta\delta_x$、$\Delta\delta_y$。这些方程称为横侧小扰动运动方程。

可见，在基准运动为铅垂平面内的对称定常直线飞行的条件下，小扰动运动方程可以分解成两组互相独立的方程，即纵向方程组和横侧方程组。而且每一组都是由常系数的线性一阶微分方程或线性代数方程组成。这就使得人们有可能运用有效的解析工具来研究飞行器的受扰运动，并从中总结出一些对飞行器设计来说十分重要的规律。

下面将分别地仔细研讨纵向运动方程和横侧运动方程。

§ 4 纵向小扰动方程组

4-1 纵向小扰动方程组的自然形式

为了便于分析，现在把纵向小扰动方程组的各方程进行必要的加工整理。把彼此互相影响（互相耦合）的方程收集到一起；并利用关系式$\Delta\theta=\Delta\vartheta-\Delta\alpha$和$\Delta\omega_z=d\Delta\vartheta/dt$，消去变量$\Delta\theta$和$\Delta\omega_z$；把$\Delta\delta_z$和$\Delta P_c$看作输入变量，放在方程的右边，把$\Delta v$、$\Delta\alpha$、$\Delta\vartheta$、$\Delta h$看作输出变量，放在方程的左边，且按顺序排列。于是得到耦合方程组如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\left\{m\frac{d}{dt}+\left[-P^v\cos(\alpha_*+\varphi_p)+Q^v\right]\right\}\Delta v+\left[P_*\sin(\alpha_*+\varphi_p)+Q^\alpha-\right.\\
&\qquad\left.-mg\cos\theta_*\right]\Delta\alpha+mg\cos\theta_*\Delta\vartheta+\left[-P^h\cos(\alpha_*+\varphi_p)+Q^h\right]\Delta h\\
&\quad=Q^{\delta_z}\Delta\delta_z+\cos(\alpha_*+\varphi_p)\Delta P_c\\
&-\left[P^v\sin(\alpha_*+\varphi_p)+Y^v\right]\Delta v-\left\{(Y^{\dot\alpha}+mv_*)\frac{d}{dt}+\left[Y^\alpha+P_*\cos(\alpha_*+\varphi_p)-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-mg\sin\theta_*\right]\right\}\Delta\alpha-\left[(Y^{\omega_z}-mv_*)\frac{d}{dt}+mg\sin\theta_*\right]\Delta\vartheta-\\
&\qquad\left[P^h\sin(\alpha_*+\varphi_p)+Y^h\right]\Delta h=Y^{\delta_z}\Delta\delta_z+\sin(\alpha_*+\varphi_p)\Delta P_c\\
&-(M_z^v-P^ve_p)\Delta v-\left(M_z^{\dot\alpha}\frac{d}{dt}+M_z^\alpha\right)\Delta\alpha+\left(I_z\frac{d^2}{dt^2}-M_z^{\omega_z}\frac{d}{dt}\right)\Delta\vartheta-\\
&\qquad-(M_z^h-P^he_p)\Delta h=M_z^{\delta_z}\Delta\delta_z+e_p\Delta P_c\\
&-\sin\theta_*\Delta v+v_*\cos\theta_*\Delta\alpha-v_*\cos\theta_*\Delta\vartheta+\frac{d\Delta h}{dt}=0
\end{aligned}\right\}\quad(4\text{-}36)
$$

其余的变量$\Delta\theta$、$\Delta\omega_z$、Δx_D可以在耦合方程组解出以后利用如下的非耦合方程算

出：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\theta &= \Delta\vartheta - \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z &= \frac{d\Delta\vartheta}{dt}\\ \frac{d\Delta x_D}{dt} &= \cos\theta_*\Delta v - v_*\sin\theta_*\Delta\theta\end{aligned}\right\}\tag{4-37}$$

当研究飞行器的稳定性和操纵性时，主要利用耦合方程组（4-36）。当给定$\Delta\delta_z$和ΔP_c时，利用此方程组可以得到运动变量Δv、$\Delta\alpha$、$\Delta\vartheta$、Δh的动态响应；由此方程组可以推导出飞行器的传递函数；若令$\Delta\delta_z=0$，$\Delta P_c=0$，则此方程组描述飞行器在握杆状态下的纵向自由扰动运动，从中可以研究飞行器运动的动态稳定性。

线性化的方程组（4-36）仍保持其原来的（线性化以前的）物理意义。第一个是切向力方程；第二个是法向力方程；第三个是俯仰力矩方程；第四个是高度变化方程。因此，称它为自然形式的方程组。

为了今后研究和计算的方便，引入如下的纵向动力学导数：

$$\begin{aligned}
x^v &= [P^v\cos(\alpha_*+\varphi_p) - Q^v]/m\\
x^\alpha &= [-P_*\sin(\alpha_*+\varphi_p) - Q^\alpha]/m\\
x^h &= [P^h\cos(\alpha_*+\varphi_p) - Q^h]/m\\
x^{\delta_z} &= -Q^{\delta_z}/m\\
x^P &= \cos(\alpha_*+\varphi_p)/m\\
y^v &= [P^v\sin(\alpha_*+\varphi_p) + Y^v]/mv_*\\
y^\alpha &= [Y^\alpha + P_*\cos(\alpha_*+\varphi_p)]/mv_*\\
y^{\dot\alpha} &= Y^{\dot\alpha}/mv_*\\
y^{\omega_z} &= Y^{\omega_z}/mv_*\\
y^h &= [P^h\sin(\alpha_*+\varphi_p) + Y^h]/mv_*\\
y^{\delta_z} &= Y^{\delta_z}/mv_*\\
y^P &= \sin(\alpha_*+\varphi_p)/mv_*\\
\mu_z^v &= (M_z^v - P^v e_p)/I_z\\
\mu_z^\alpha &= M_z^\alpha/I_z\\
\mu_z^{\dot\alpha} &= M_z^{\dot\alpha}/I_z\\
\mu_z^{\omega_z} &= M_z^{\omega_z}/I_z\\
\mu_z^h &= (M_z^h - P^h e_p)/I_z\\
\mu_z^{\delta_z} &= M_z^{\delta_z}/I_z\\
\mu_z^P &= -e_p/I_z
\end{aligned}\tag{4-38}$$

这里必须指出几点。第一，这些导数仍是有量纲的，沒进行无量纲化；第二，这些导数仅代表推力和气动力，沒代表重力和惯性力；第三，在这些导数的表达式中出现的气动力和力矩本身的导数（例如Y^v、M_z^α、$M_z^{\omega_z}$）应按公式（4-15）至（4-20）计算；第四，每个导数都有明显的物理意义。

利用以上定义的动力学导数，并且引用微分算子$p=d/dt$，则耦合的纵向小扰动方程（4-36）可以写成

$$
\begin{aligned}
&(p-x^{v})\Delta v-(x^{\alpha}+g\cos\theta_{*})\Delta\alpha+g\cos\theta_{*}\Delta\vartheta-x^{h}\Delta h=x^{\delta_z}\Delta\delta_z+x^{P}\Delta P_c\\
&-y^{v}\Delta v-\left[(y^{\dot\alpha}+1)p+y^{\alpha}-\frac{g}{v_{*}}\sin\theta_{*}\right]\Delta\alpha-\left[(y^{\omega_z}-1)p+\frac{g}{v_{*}}\sin\theta_{*}\right]\Delta\vartheta\\
&\qquad -y^{h}\Delta h=y^{\delta_z}\Delta\delta_z+y^{P}\Delta P_c\\
&-\mu_z^{v}\Delta v-(\mu_z^{\dot\alpha}p+\mu_z^{\alpha})\Delta\alpha+(p^2-\mu_z^{\omega_z}p)\Delta\vartheta-\mu_z^{h}\Delta h=\mu_z^{\delta_z}\Delta\delta_z+\mu_z^{P}\Delta P_c\\
&-\sin\theta_{*}\Delta v-v_{*}\cos\theta_{*}\Delta\alpha+v_{*}\cos\theta_{*}\Delta\vartheta+p\Delta h=0
\end{aligned}
\tag{4-39}
$$

4-2 纵向小扰动方程组的矩阵形式

现今在线性系统的研究中广泛采用如下形式的状态方程：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4-40}$$

其中 $\mathbf{x}$ 是 n 维状态矢量；

$\mathbf{A}$ 是$n\times n$维系统矩阵（或称状态矩阵）；

$\mathbf{B}$ 是$n\times m$维控制矩阵；

$\mathbf{u}$ 是m维控制矢量。

这种标准矩阵形式的状态方程有许多现成的成熟的分析方法和计算方法，而且特别便于利用计算机求解。所以希望把飞行器小扰动方程组的自然形式转化成标准矩阵形式。

为此，对于纵向小扰动方程(4-39)，取五个状态变量Δv、$\Delta\alpha$、$\Delta\omega_z$、$\Delta\vartheta$、Δh，并经过简单的代数变换（由第二个方程得到 $p\Delta\alpha$ 的表达式，代入第三个方程中），得到式(4-41)，见第75页。

4-3 几种简化情况

五阶的方程组（4-39）或（4-41）是“精确的”纵向小扰动方程组，但它有自身矛盾的地方。当基准飞行状态不是水平飞行时，按“系数冻结”的原则，并不考虑高度变化对方程系数的影响，可是方程组却考虑了扰动运动中高度微小变化的影响，这是本末倒置的。因此，合理的情况只有两种：如果考虑Δh的影响，则必须假定$\theta_{*}=0$；如果$\theta_{*}\neq0$，则应不考虑Δh的影响。当然，在以上前提下，还可以作进一步的其它简化。以下就来研究这些简化情况。

简化情况Ⅰ　基准运动为水平直线飞行，即$\theta_{*}=0$。于是方程的自然形式为

$$
\left.
\begin{aligned}
&(p-x^{v})\Delta v-(x^{\alpha}+g)\Delta\alpha+g\Delta\vartheta-x^{h}\Delta h=x^{\delta_z}\Delta\delta_z+x^{P}\Delta P_c\\
&-y^{v}\Delta v-[(y^{\dot\alpha}+1)p+y^{\alpha}]\Delta\alpha-(y^{\omega_z}-1)p\Delta\vartheta-y^{h}\Delta h=y^{\delta_z}\Delta\delta_z+y^{P}\Delta P_c\\
&-\mu_z^{v}\Delta v-(\mu_z^{\dot\alpha}p+\mu_z^{\alpha})\Delta\alpha+(p^2-\mu_z^{\omega_z}p)\Delta\vartheta-\mu_z^{h}\Delta h=\mu_z^{\delta_z}\Delta\delta_z+\mu_z^{P}\Delta P_c\\
&v_{*}\Delta\alpha-v_{*}\Delta\vartheta+p\Delta h=0
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-42}
$$

方程的矩阵形式为式（4-43），见第76页。

这个五阶方程组可以用来研究飞行器的水平巡航飞行的特性，特别是飞行高度稳定化问题。

简化情况Ⅱ　如果在扰动运动中飞行高度的变化Δh对力和力矩的影响可以忽略不计，则耦合方程组的自然形式为式（4-44），见第77页。

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\\ \Delta h\end{pmatrix}=
\begin{pmatrix}
x^v & x^\alpha+g\cos\theta_* & 0 & -g\cos\theta_* & x^h\\
-\dfrac{y^v}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{y^\alpha-g\sin\theta_*/v_*}{1+y^{\dot\alpha}} & \dfrac{1-y^{\omega_z}}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{g\sin\theta_*/v_*}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{y^h}{1+y^{\dot\alpha}}\\
\mu_z^v-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^v}{1+y^{\dot\alpha}} & \mu_z^\alpha-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}(y^\alpha-g\sin\theta_*/v_*)}{1+y^{\dot\alpha}} & \mu_z^{\omega_z}+\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}(1-y^{\omega_z})}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}g\sin\theta_*/v_*}{1+y^{\dot\alpha}} & \mu_z^h-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^h}{1+y^{\dot\alpha}}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\sin\theta_* & -v_*\cos\theta_* & 0 & v_*\cos\theta_* & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\\ \Delta h\end{pmatrix}+
$$

$$
+\begin{pmatrix}
x^{\delta_z} & x^P\\
-\dfrac{y^{\delta_z}}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{y^P}{1+y^{\dot\alpha}}\\
\mu_z^{\delta_z}-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^{\delta_z}}{1+y^{\dot\alpha}} & \mu_z^P-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^P}{1+y^{\dot\alpha}}\\
0 & 0\\
0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\Delta\delta_z\\ \Delta P_c\end{pmatrix}
\qquad (4\text{-}41)
$$

$$
\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}\Delta v\\ \Delta \alpha\\ \Delta \omega_z\\ \Delta \vartheta\\ \Delta h\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}
x^{v} & x^{\alpha}+g & 0 & -g & x^{h}\\
-\frac{y^{v}}{1+y^{\dot{\alpha}}} & -\frac{y^{\alpha}}{1+y^{\dot{\alpha}}} & \frac{1-y^{\omega_z}}{1+y^{\dot{\alpha}}} & 0 & -\frac{y^{h}}{1+y^{\dot{\alpha}}}\\
\mu_z^{v}-\frac{\mu_z^{\dot{\alpha}}y^{v}}{1+y^{\dot{\alpha}}} & \mu_z^{\alpha}-\frac{\mu_z^{\dot{\alpha}}y^{\alpha}}{1+y^{\dot{\alpha}}} & \mu_z^{\omega_z}+\frac{\mu_z^{\dot{\alpha}}(1-y^{\omega_z})}{1+y^{\dot{\alpha}}} & 0 & \mu_z^{h}-\frac{\mu_z^{\dot{\alpha}}y^{h}}{1+y^{\dot{\alpha}}}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -v_* & 0 & v_* & 0
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v\\ \Delta \alpha\\ \Delta \omega_z\\ \Delta \vartheta\\ \Delta h\end{Bmatrix}+
$$

$$
+\begin{bmatrix}
x^{\delta_z} & x^{P}\\
-\frac{y^{\delta_z}}{1+y^{\dot{\alpha}}} & -\frac{y^{P}}{1+y^{\dot{\alpha}}}\\
\mu_z^{\delta_z}-\frac{\mu_z^{\dot{\alpha}}y^{\delta_z}}{1+y^{\dot{\alpha}}} & \mu_z^{P}-\frac{\mu_z^{\dot{\alpha}}y^{P}}{1+y^{\dot{\alpha}}}\\
0 & 0\\
0 & 0
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta \delta_z\\ \Delta P_r\end{Bmatrix} \tag{4-43}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&(p - x^v)\Delta v - (x^\alpha + g\cos\theta_*)\Delta\alpha + g\cos\theta_*\Delta\vartheta = x^{\delta_z}\Delta\delta_z - x^P\Delta P_c \\
&-y^v\Delta v - \left[(y^{\dot\alpha}+1)p + y^\alpha - \frac{g}{v_*}\sin\theta_*\right]\Delta\alpha - \left[(y^{\omega_z}-1)p + \frac{g}{v_*}\sin\theta_*\right]\Delta\vartheta \\
&\qquad = y^{\delta_z}\Delta\delta_z + y^P\Delta P_c \\
&-\mu_z^v\Delta v - (\mu_z^{\dot\alpha}p + \mu_z^\alpha)\Delta\alpha + (p^2 - \mu_z^{\omega_z}p)\Delta\vartheta = \mu_z^{\delta_z}\Delta\delta_z + \mu_z^P\Delta P_c
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-44}
$$

此方程组的矩阵形式为式（4-45），见第78页。

多数情况下还可以忽略$Y^{\dot\alpha}$和Y^{ω_z}，即忽略$y^{\dot\alpha}$和y^{ω_z}，于是方程组进一步简化成为

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
x^v & x^\alpha + g\cos\theta_* & 0 & -g\cos\theta_* \\
-y^v & -y^\alpha + g\sin\theta_*/v_* & 1 & -g\sin\theta_*/v_* \\
\mu_z^v - \mu_z^{\dot\alpha}y^v & \mu_z^\alpha - \mu_z^{\dot\alpha}(y^\alpha - g\sin\theta_*/v_*) & \mu_z^{\omega_z} + \mu_z^{\dot\alpha} & -\mu_z^{\dot\alpha}g\sin\theta_*/v_* \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}
x^{\delta_z} & x^P \\
-y^{\delta_z} & -y^P \\
\mu_z^{\delta_z} - \mu_z^{\dot\alpha}y^{\delta_z} & \mu_z^P - \mu_z^{\dot\alpha}y^P \\
0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta\delta_z\\ \Delta P_c\end{bmatrix}
\tag{4-46}
$$

如果除了以上条件以外，还加上基准运动为水平飞行，即$\theta_*=0$的条件，则方程组成为

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
x^v & x^\alpha + g & 0 & -g \\
-y^v & -y^\alpha & 1 & 0 \\
\mu_z^v - \mu_z^{\dot\alpha}y^v & \mu_z^\alpha - \mu_z^{\dot\alpha}y^\alpha & \mu_z^{\omega_z} + \mu_z^{\dot\alpha} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}
x^{\delta_z} & x^P \\
-y^{\delta_z} & -y^P \\
\mu_z^{\delta_z} - \mu_z^{\dot\alpha}y^{\delta_z} & \mu_z^P - \mu_z^{\dot\alpha}y^P \\
0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta\delta_z\\ \Delta P_c\end{bmatrix}
\tag{4-47}
$$

在研究飞行器的纵向运动特性时，式（4-46）或（4-47）是最常用的方程。

简化情况Ⅱ 在研究飞行器短周期模态特性时，所考虑的时间短，速度还没有明显的变化，因此不仅Δh而且Δv的影响也可以忽略。此外，通常还假设基准运动是水平的，即$\theta_*=0$。还有，在短周期模态中考虑对推力ΔP_c的响应是没有实际意义的，故设$\Delta P_c=0$。此时，$\Delta\vartheta$已不是耦合变量了，所以短周期运动方程写成

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
-\dfrac{y^\alpha}{1+y^{\dot\alpha}} & \dfrac{1-y^{\omega_z}}{1+y^{\dot\alpha}} \\
\mu_z^\alpha - \dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^\alpha}{1+y^{\dot\alpha}} & \mu_z^{\omega_z} + \dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}(1-y^{\omega_z})}{1+y^{\dot\alpha}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}
-\dfrac{y^{\delta_z}}{1+y^{\dot\alpha}} \\
\mu_z^{\delta_z} - \dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^{\delta_z}}{1+y^{\dot\alpha}}
\end{bmatrix}
\Delta\delta_z
\tag{4-48}
$$

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
x^{v} & x^{\alpha}+g\cos\theta_* & 0 & -g\cos\theta_*\\
-\dfrac{y^{v}}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{y^{\alpha}-g\sin\theta_*/v_*}{1+y^{\dot\alpha}} & \dfrac{1-y^{\omega_z}}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{g\sin\theta_*/v_*}{1+y^{\dot\alpha}}\\
\mu_z^{v}-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^{v}}{1+y^{\dot\alpha}} & \mu_z^{\alpha}-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}(y^{\alpha}-g\sin\theta_*/v_*)}{1+y^{\dot\alpha}} & \mu_z^{\omega_z}+\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}(1-y^{\omega_z})}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}g\sin\theta_*/v_*}{1+y^{\dot\alpha}}\\
0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}
x^{\delta_z} & x^{P}\\
-\dfrac{y^{\delta_z}}{1+y^{\dot\alpha}} & -\dfrac{y^{P}}{1+y^{\dot\alpha}}\\
\mu_z^{\delta_z}-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^{\delta_z}}{1+y^{\dot\alpha}} & \mu_z^{P}-\dfrac{\mu_z^{\dot\alpha}y^{P}}{1+y^{\dot\alpha}}\\
0 & 0
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta_z\\ \Delta P_c\end{bmatrix}\qquad(1\text{-}15)
$$

通常更进一步忽略$Y^{\dot{\alpha}}$和Y^{ω_z}，于是得到最常用的短周期运动近似方程

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y^{\alpha} & 1\\ \mu_z^{\alpha}-\mu_z^{\dot{\alpha}}y^{\alpha} & \mu_z^{\omega_z}+\mu_z^{\dot{\alpha}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y^{\delta_z}\\ \mu_z^{\delta_z}-\mu_z^{\dot{\alpha}}y^{\delta_z}\end{bmatrix}\Delta\delta_z \tag{4-49}$$

简化情况Ⅳ　在飞行器的长周期模态中，俯仰运动进行得很缓慢，因而与$\dot{\alpha}$和ω_z有关的力和力矩可以忽略，而且转动惯性$p^2\Delta\vartheta$也可以忽略。此外，不考虑Δh的影响。在以上条件下，利用关系式$\Delta\theta=\Delta\vartheta-\Delta\alpha$，把方程（4-39）简化成为

$$\left.\begin{aligned}&(p-x^v)\Delta v-x^{\alpha}\Delta\alpha+g\cos\theta_*\Delta\theta=x^{\delta_z}\Delta\delta_z+x^P\Delta P_c\\ &-y^v\Delta v-y^{\alpha}\Delta\alpha+(p-g\sin\theta_*/v_*)\Delta\theta=y^{\delta_z}\Delta\delta_z+y^P\Delta P_c\\ &-\mu_z^v\Delta v-\mu_z^{\alpha}\Delta\alpha=\mu_z^{\delta_z}\Delta\delta_z+\mu_z^P\Delta P_c\end{aligned}\right\}$$

把由第三式（力矩平衡方程式）得到的

$$\Delta\alpha=-(\mu_z^v\Delta v+\mu_z^{\delta_z}\Delta\delta_z+\mu_z^P\Delta P_c)/\mu_z^{\alpha}$$

代入前两式，并引入下列“平衡导数”符号：

$$x_b^v=x^v-\frac{\mu_z^v x^{\alpha}}{\mu_z^{\alpha}}\qquad y_b^v=y^v-\frac{\mu_z^v y^{\alpha}}{\mu_z^{\alpha}}$$

$$x_b^{\delta_z}=x^{\delta_z}-\frac{\mu_z^{\delta_z}x^{\alpha}}{\mu_z^{\alpha}}\qquad y_b^{\delta_z}=y^{\delta_z}-\frac{\mu_z^{\delta_z}y^{\alpha}}{\mu_z^{\alpha}}$$

$$x_b^P=x^P-\frac{\mu_z^P x^{\alpha}}{\mu_z^{\alpha}}\qquad y_b^P=y^P-\frac{\mu_z^P y^{\alpha}}{\mu_z^{\alpha}} \tag{4-50}$$

于是得到长周期运动的近似方程

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_b^v & -g\cos\theta_*\\ y_b^v & g\sin\theta_*/v_*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_b^{\delta_z} & x_b^P\\ y_b^{\delta_z} & y_b^P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta_z\\ \Delta P_c\end{bmatrix} \tag{4-51}$$

4-4　飞行器纵向运动的特征方程和传递函数

为了便于查阅，在这里把纵向运动的两种重要的常见的情况下的特征方程和传递函数列写出来。

首先考虑由方程（4-46）所描述的情况，即不考虑高度变化的影响而且忽略$Y^{\dot{\alpha}}$和Y^{ω_z}的情况。为了方便起见，引入下列符号

$$g_c=g\cos\theta_*\qquad g_{sv}=g\sin\theta_*/v_* \tag{4-52}$$

并且把μ_z简写成μ，把上标ω_z和δ_z简写成ω和δ。

特征多项式是

$$\Delta(s)=a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0 \tag{4-53}$$

且

$$\Delta(s)=a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0 \tag{4-53'}$$

为特征方程式。

其中

$$a_4=1$$

$$a_3=-x^v+y^{\alpha}-\mu^{\omega}-\mu^{\dot{\alpha}}-g_{sv}$$

$$\begin{aligned}a_2=&x^v[\mu^{\omega}+\mu^{\dot{\alpha}}-(y^{\alpha}-g_{sv})]+(x^{\alpha}+g_c)y^v-(y^{\alpha}-g_{sv})\mu^{\omega}\\ &-\mu^{\alpha}+g_{sv}\mu^{\dot{\alpha}}\end{aligned}$$

$$a_1 = g_c(\mu^v - y^v\mu^{\dot{\alpha}}) - (x^\alpha + g_c)(\mu^v + y^v\mu^\omega) - x^v[\mu^\alpha + (g^\alpha - g_{sv})\mu^\omega] + g_{sv}(\mu^\alpha - x^v\mu^{\dot{\alpha}})$$

$$a_0 = g_c[-y^v\mu^\alpha + (y^\alpha - g_{sv})\mu^v] + g_{sv}[-x^v\mu^\alpha + (x^\alpha + g_c)\mu^v]$$

以升降舵偏角δ_z为输入量时传递函数为

(1)
$$W^v_{\delta_z}(s) = \frac{N^v_{\delta_z}(s)}{\Delta(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{\Delta(s)} \tag{4-54}$$

其中

$$b_3 = x^\delta$$

$$b_2 = [-\mu^\omega - \mu^{\dot{\alpha}} + (y^\alpha - g_{sv})]x^\delta - (x^\alpha + g_c)y^\delta$$

$$b_1 = [-(y^\alpha - g_{sv})\mu^\omega - \mu^\alpha + g_{sv}\mu^{\dot{\alpha}}]x^\delta + [g_c(\mu^\omega - \mu^{\dot{\alpha}}) + x^\alpha\mu^\omega]y^\delta + x^\alpha\mu^\delta$$

$$b_0 = g_{sv}\mu^\alpha x^\delta + g_c\mu^\alpha y^\delta + (-g_{sv}x^\alpha - g_c y^\alpha)\mu^\delta$$

(2)
$$W^\alpha_{\delta_z}(s) = \frac{N^\alpha_{\delta_z}(s)}{\Delta(s)} = \frac{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{\Delta(s)} \tag{4-55}$$

其中

$$c_3 = -y^\delta$$

$$c_2 = -y^v x^\delta + (\mu^\omega - x^v)y^\delta + \mu^\delta$$

$$c_1 = (y^v\mu^\omega + \mu^v)x^\delta - x^v\mu^\omega y^\delta - (g_{sv} + x^v)\mu^\delta$$

$$c_0 = -g_{sv}\mu^v x^\delta - g_c\mu^v y^\delta + (g_c y^v + g_{sv}x^v)\mu^\delta$$

(3)
$$W^\vartheta_{\delta_z}(s) = \frac{N^\vartheta_{\delta_z}(s)}{\Delta(s)} = \frac{e_2 s^2 + e_1 s + e_0}{\Delta(s)} \tag{4-56}$$

其中

$$e_2 = -\mu^{\dot{\alpha}}y^\delta + \mu^\delta$$

$$e_1 = (-y^v\mu^{\dot{\alpha}} + \mu^v)x^\delta + (-\mu^\alpha + x^v\mu^{\dot{\alpha}})y^\delta + (y^\alpha - g_{sv} - x^v)\mu^\delta$$

$$e_0 = [-y^v\mu^\alpha + (y^\alpha - g_{sv})\mu^v]x^\delta + [-(x^\alpha + g_c)\mu^v + x^v\mu^\alpha]y^\delta + [-x^v(y^\alpha - g_{sv}) + (x^\alpha - g_c)y^v]\mu^\delta$$

(4) 其余传递函数

$$\left.\begin{aligned} W^\theta_{\delta_z}(s) &= W^\vartheta_{\delta_z}(s) - W^\alpha_{\delta_z}(s) \\ W^{\omega_z}_{\delta_z}(s) &= sW^\vartheta_{\delta_z}(s) \\ W^h_{\delta_z}(s) &= \frac{1}{s}[\sin\theta_* W^v_{\delta_z}(s) + v_*\cos\theta_* W^\theta_{\delta_z}(s)] \end{aligned}\right\} \tag{4-57}$$

以ΔP_c作为输入时，传递函数同上，只要以x^P、y^P、μ^P_z代替x^δ、y^δ、μ^δ。

然后考虑由方程（4-49）所近似描述的短周期运动的情况。

特征方程式是

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{4-58}$$

其中

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = y^\alpha - (\mu^\omega + \mu^{\dot{\alpha}})$$

$$a_0 = -\mu^\alpha - y^\alpha\mu^\omega$$

以升降舵偏角δ_z作为输入时，传递函数为

(1)
$$W^\alpha_{\delta_z}(s) = \frac{N^\alpha_{\delta_z}(s)}{\Delta(s)} = \frac{c_1 s + c_0}{\Delta(s)} \tag{4-59}$$

其中

$$c_1 = -y^{\delta}$$

$$c_0 = \mu^{\omega} y^{\delta} + \mu^{\delta}$$

(2)

$$W_{\delta_z}^{\omega_z}(s) = \frac{N_{\delta_z}^{\omega_z}(s)}{\Delta(s)} = \frac{f_1 s + f_0}{\Delta(s)} \tag{4-60}$$

其中

$$f_1 = \mu^{\delta} - \mu^{\dot{\alpha}} y^{\delta}$$

$$f_0 = y^{\alpha} \mu^{\delta} - \mu^{\alpha} y^{\delta}$$

(3) 其余传递函数

$$\left.\begin{aligned} W_{\delta_z}^{\vartheta}(s) &= \frac{1}{s} W_{\delta_z}^{\omega_z}(s) \\ W_{\delta_z}^{\theta}(s) &= W_{\delta_z}^{\vartheta}(s) - W_{\delta_z}^{\alpha}(s) \end{aligned}\right\} \tag{4-61}$$

§5 横侧向小扰动方程組

5-1 横侧向小扰动方程组的自然形式

由于所考虑的基准运动（未扰动运动）是对称运动，其中所有的横侧变量 β_*、ω_{x*}、ω_{y*}、γ_*、ψ_*、ψ_{s*}、z_{D*}、γ_{s*}都等于0，因此有

$$\Delta\beta = \beta - \beta_* = \beta,\ \Delta\omega_x = \omega_x - \omega_{x*} = \omega_x,\ \cdots$$

可见，横侧变量的偏量就等于该变量本身。以后不必使用前置符号 Δ。

在横侧扰动方程组中，式（4-23）、（4-24）、（4-25）、（4-30）是彼此相关的，形成耦合方程组。把副翼偏转角 δ_x 和方向舵偏转角 δ_y 看作输入变量，放在方程的右边，把侧滑角 β，滚转角速度 ω_x，偏航角速度 ω_y，滚转角 γ 当作输出变量，放在方程的左边。于是，横侧小扰动运动的耦合方程组是

$$\begin{aligned}
&\left(mv_*\frac{d}{dt} + Q_* - Z^{\beta}\right)\beta - (mv_*\alpha_* + Z^{\omega_x})\omega_x - (mv_* + Z^{\omega_y})\omega_y - \\
&\quad - mg\cos\vartheta_*\gamma = Z^{\delta_y}\delta_y \\
&-M_x^{\beta}\beta + \left(I_x\frac{d}{dt} - M_x^{\omega_x}\right)\omega_x - \left(I_{xy}\frac{d}{dt} + M_x^{\omega_y}\right)\omega_y = M_x^{\delta_x}\delta_x + M_x^{\delta_y}\delta_y \\
&-M_y^{\beta}\beta - \left(I_{xy}\frac{d}{dt} + M_y^{\omega_x}\right)\omega_x + \left(I_y\frac{d}{dt} - M_y^{\omega_y}\right)\omega_y = M_y^{\delta_x}\delta_x + M_y^{\delta_y}\delta_y \\
&-\omega_x + \mathrm{tg}\vartheta_*\omega_y + \frac{d\gamma}{dt} = 0
\end{aligned} \tag{4-62}$$

其余的方程（4-29）、（4-31）、（4-33）、（4-35）是非耦合方程，列出如下：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta_*}\omega_y \\
\psi_s &= \psi - \frac{\beta - \sin\alpha_*\gamma}{\cos\theta_*} \\
\frac{dz_D}{dt} &= -v_*\cos\theta_*\psi_s \\
\gamma_s &= \mathrm{tg}\theta_*\beta + \frac{\cos\vartheta_*}{\cos\theta_*}\gamma
\end{aligned}\right\} \tag{4-63}$$

以后主要研究耦合方程组（4-62）。利用它，不仅可以分析握杆状态（$\delta_x=0$，$\delta_y=0$）下飞行器的稳定性，而且可以分析飞行器横侧运动变量β、ω_x、ω_y、γ对操纵输入量δ_x、δ_y的动态响应特性。

线性化的方程组（4-62）仍有明显的物理意义。第一个是侧向力方程；第二个是滚转力矩方程；第三个是偏航力矩方程；第四个是运动学关系方程。

为了使用方便，引入如下的横侧动力学导数：

$$\left.\begin{aligned} & z^{\beta}=(Z^{\beta}-Q_*)/mv_* \\ & z^{r}=Z^{r}/mv_* \quad (r=\omega_x,\ \omega_y,\ \delta_y) \\ & \left.\begin{aligned} \mu_{xo}^{r}=M_x^r/I_x \\ \mu_{yo}^{r}=M_y^r/I_y \end{aligned}\right\} \quad (r=\beta,\ \omega_x,\ \omega_y,\ \delta_x,\ \delta_y) \end{aligned}\right\} \tag{4-64}$$

此外，还定义相对惯性积

$$\left.\begin{aligned} i_{cx}=I_{xy}/I_x \\ i_{cy}=I_{xy}/I_y \end{aligned}\right\}, \tag{4-65}$$

利用以上符号及微分算子，横侧小扰动耦合方程组（4-62）可以写成

$$\left.\begin{aligned} & (p-z^{\beta})\beta-(\alpha_*+z^{\omega_x})\omega_x-(1+z^{\omega_y})\omega_y-(g\cos\vartheta_*/v_*)\gamma=z^{\delta_y}\delta_y \\ & -\mu_{xo}^{\beta}\beta+(p-\mu_{xo}^{\omega_x})\omega_x-(i_{cx}p+\mu_{xo}^{\omega_y})\omega_y=\mu_{xo}^{\delta_x}\delta_x+\mu_{xo}^{\delta_y}\delta_y \\ & -\mu_{yo}^{\beta}\beta-(i_{cy}p+\mu_{yo}^{\omega_x})\omega_x+(p-\mu_{yo}^{\omega_y})\omega_y=\mu_{yo}^{\delta_x}\delta_x+\mu_{yo}^{\delta_y}\delta_y \\ & -\omega_x+\mathrm{tg}\vartheta_*\omega_y+p\gamma=0 \end{aligned}\right\} \tag{4-66}$$

5-2 用修正导数法化成标准形式

由于惯性积I_{xy}的存在，横侧运动方程组（4-62）或（4-66）不是一阶线性微分方程组的标准形式，因而不能直接写成矩阵形式。为了在外观上消去I_{xy}的作用，可以采取两个办法。第一是"修正导数法"；第二是"惯性主轴法"。现在讲述第一个方法。

回到两个力矩方程的原始形式（4-24）和（4-25）

$$\left.\begin{aligned} I_x\frac{d\omega_x}{dt}-I_{xy}\frac{d\omega_y}{dt}=M_x \\ -I_{xy}\frac{d\omega_x}{dt}+I_y\frac{d\omega_y}{dt}=M_y \end{aligned}\right\} \tag{4-67}$$

由此解出

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt}=\frac{I_yM_x+I_{xy}M_y}{I_xI_y-I_{xy}^2}=\frac{M_x+(I_{xy}/I_y)M_y}{I_x-I_{xy}^2/I_y} \\ \frac{d\omega_y}{dt}=\frac{I_xM_y+I_{xy}M_x}{I_xI_y-I_{xy}^2}=\frac{M_y+(I_{xy}/I_x)M_x}{I_y-I_{xy}^2/I_x} \end{aligned}\right\} \tag{4-68}$$

考虑到M_x和M_y的展开式（4-13）和（4-14），并且引入修正的动力学导数

$$\left.\begin{aligned} & \mu_x^r=\frac{M_x^r+(I_{xy}/I_y)M_y^r}{I_x-I_{xy}^2/I_y} \\ & \mu_y^r=\frac{M_y^r+(I_{xy}/I_x)M_x^r}{I_y-I_{xy}^2/I_x} \\ & (r=\beta,\omega_x,\omega_y,\ \delta_x,\ \delta_y) \end{aligned}\right\} \tag{4-69}$$

于是方程组（4-66）可以写成

$$
\left.\begin{aligned}
&(p-z^{\beta})\beta-(\alpha_*+z^{\omega x})\omega_x-(1+z^{\omega y})\omega_y-(g\cos\vartheta_*/v_*)\gamma=z^{\delta y}\delta_y\\
&-\mu_x^{\beta}\beta+(p-\mu_x^{\omega x})\omega_x-\mu_x^{\omega y}\omega_y=\mu_x^{\delta x}\delta_x+\mu_x^{\delta y}\delta_y\\
&-\mu_y^{\beta}\beta-\mu_y^{\omega x}\omega_x+(p-\mu_y^{\omega y})\omega_y=\mu_y^{\delta x}\delta_x+\mu_y^{\delta y}\delta_y\\
&-\omega_x+\mathrm{tg}\vartheta_*\omega_y+p\gamma=0
\end{aligned}\right\} \tag{4-70}
$$

这个方程组可以直接写成矩阵形式

$$
\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}\beta\\ \omega_x\\ \omega_y\\ \gamma\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} z^{\beta} & \alpha_*+z^{\omega x} & 1+z^{\omega y} & g\cos\vartheta_*/v_*\\ \mu_x^{\beta} & \mu_x^{\omega x} & \mu_x^{\omega y} & 0\\ \mu_y^{\beta} & \mu_y^{\omega x} & \mu_y^{\omega y} & 0\\ 0 & 1 & -\mathrm{tg}\vartheta_* & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \omega_x\\ \omega_y\\ \gamma\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & z^{\delta y}\\ \mu_x^{\delta x} & \mu_x^{\delta y}\\ \mu_y^{\delta x} & \mu_y^{\delta y}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{Bmatrix} \tag{4-71}
$$

修正导数法并不改变运动变量的含义，而且计算也不太复杂，因此是相当有效的方法。

在多数情况下，$Z^{\omega x}$ 和 $Z^{\omega y}$ 可以忽略不计，即 $z^{\omega x}$、$z^{\omega y}$ 可忽略。因此方程（4-71）的系数矩阵的第一行可简化为

$$
(z^{\beta}\quad \alpha_*\quad 1\quad g\cos\vartheta_*/v_*) \tag{4-72}
$$

5-3 用惯性主轴法化成标准形式

为了把横侧扰动运动方程写成矩阵形式，也可以采用惯性主轴系，对于它而言，惯性积等于零。

设想对于具有对称平面的飞行器原来已经根据结构特征（例如机身轴线或平均气动弦）或测量仪表的安装基准线选定了某机体坐标系 $Ox_ty_tz_t$，并且已求出了转动惯量 I_x、I_y、I_z 和惯性积 $I_{xy}\neq 0$。要求找出惯性主轴系 $Ox_py_pz_p$，对于它而言，$I_{x_py_p}=0$。

设 x_p 与 x_t 之间的角度为 ε_p，其正向如图 4-1 所示。根据惯性积的换算公式（见后面的公式（4-81）），有

$$
I_{x_py_p}=-\sin\varepsilon_p\cos\varepsilon_p(I_y-I_x)+(\cos^2\varepsilon_p-\sin^2\varepsilon_p)I_{xy}=0
$$

即

$$
-\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon_p(I_y-I_x)+\cos 2\varepsilon_p I_{xy}=0
$$

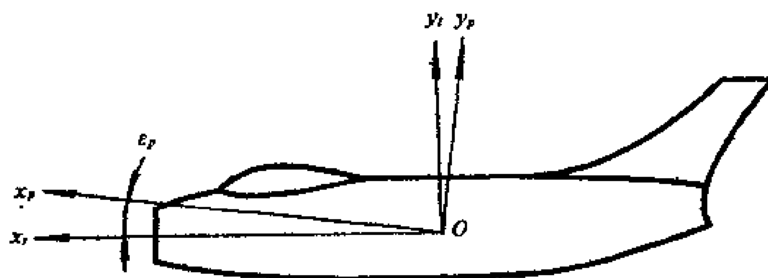


图4-1 惯性主轴的确定

由此可以确定轴 x_p 的方向

$$\varepsilon_p = \operatorname{arctg}\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right) \tag{4-73}$$

注意这里角 ε_p 是有正负意义的。

然后，按照后面将导出的公式（4-84）计算出对主轴的惯性矩 I_{xp}、I_{yp}；按公式（4-85）至（4-90）计算出对主轴的气动导数 M_{xp}^{β}、$M_{xp}^{\omega_x}$［即 $(M_x^{\beta})_p$、$(M_x^{\omega_x})_p$］等。

最后，得到矩阵形式的横侧小扰动方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\beta\\ \omega_{xp}\\ \omega_{yp}\\ \gamma_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z^{\beta} & \alpha_{p*}+z^{\omega_x} & 1+z^{\omega_y} & g\cos\vartheta_{p*}/v_* \\ \mu_{xp}^{\beta} & \mu_{xp}^{\omega_x} & \mu_{xp}^{\omega_y} & 0 \\ \mu_{yp}^{\beta} & \mu_{yp}^{\omega_x} & \mu_{yp}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{tg}\vartheta_{p*} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \omega_{xp}\\ \omega_{yp}\\ \gamma_p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & z^{\delta_y} \\ \mu_{xp}^{\delta_x} & \mu_{xp}^{\delta_y} \\ \mu_{yp}^{\delta_x} & \mu_{yp}^{\delta_y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{pmatrix} \tag{4-74}$$

按此方程组进行动态分析，得出的是 β、ω_{xp}、ω_{yp}、γ_p 的变化规律。如果涉及到安装在飞行器上的角或角速度传感器，则必须换算到安装基准线所对应的 ω_x、ω_y、γ。

总之，采用惯性主轴法需要进行相当复杂的换算（惯性矩、气动导数和运动变量），不如修正导数法那么简便。

5-4 飞行器横侧运动的特征方程和传递函数

现在对于由方程（4-71）所描述的横侧运动方程，在简化条件（4-72）（即忽略 Z^{ω_x} 和 Z^{ω_y}）下列出其特征方程和传递函数。

特征多项式是

$$\Delta(s)=a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0 \tag{4-75}$$

且

$$\Delta(s)=a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0 \tag{4-75'}$$

为特征方程式。

其中 $a_4=1$

$$a_3=-z^{\beta}-\mu_x^{\omega_x}-\mu_y^{\omega_y}$$

$$a_2=z^{\beta}(\mu_x^{\omega_x}+\mu_y^{\omega_y})+\mu_x^{\omega_x}\mu_y^{\omega_y}-\mu_x^{\omega_y}\mu_y^{\omega_x}-\alpha_*\mu_x^{\beta}-\mu_y^{\beta}$$

$$a_1=z^{\beta}(-\mu_x^{\omega_x}\mu_y^{\omega_y}+\mu_x^{\omega_y}\mu_y^{\omega_x})+\alpha_*(\mu_x^{\beta}\mu_y^{\omega_y}-\mu_y^{\beta}\mu_x^{\omega_y})-$$
$$-\mu_x^{\beta}\mu_y^{\omega_x}+\mu_y^{\beta}\mu_x^{\omega_x}+\frac{g}{v_*}\cos\vartheta_*(\operatorname{tg}\vartheta_*\mu_y^{\beta}-\mu_x^{\beta})$$

$$a_0=\frac{g}{v_*}\cos\vartheta_*\left[\operatorname{tg}\vartheta_*(\mu_x^{\beta}\mu_y^{\omega_x}-\mu_y^{\beta}\mu_x^{\omega_x})+(\mu_x^{\beta}\mu_y^{\omega_y}-\mu_y^{\beta}\mu_x^{\omega_y})\right]$$

以方向舵偏角 δ_y 作为输入时，传递函数如下：

(1) $$W_{\delta_y}^{\beta}(s)=\frac{N_{\delta_y}^{\beta}(s)}{\Delta(s)}=\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{\Delta(s)} \tag{4-76}$$

其中 $b_3=z^{\delta_y}$

$$b_2 = (\mu_x^{\omega_x} + \mu_y^{\omega_y}) z^{\delta_y} + \alpha_* \mu_x^{\delta_y} + \mu_y^{\delta_y}$$

$$b_1 = (\mu_x^{\omega_x}\mu_y^{\omega_y} - \mu_x^{\omega_y}\mu_y^{\omega_x}) z^{\delta_y} + (-\alpha_*\mu_y^{\omega_y} + \mu_y^{\omega_x} + g\cos\vartheta_*/v_*)\mu_x^{\delta_y} + [-\mu_x^{\omega_x} + \alpha_*\mu_x^{\omega_y} - (g\cos\vartheta_*/v_*)\operatorname{tg}\vartheta_*]\mu_y^{\delta_y}$$

$$b_0 = (g\cos\vartheta_*/v_*)(-\mu_y^{\omega_x}\operatorname{tg}\vartheta_* - \mu_y^{\omega_y})\mu_x^{\delta_y} + (g\cos\vartheta_*/v_*)(\mu_x^{\omega_y} + \operatorname{tg}\vartheta_*)\mu_y^{\delta_y}$$

(2)
$$W_{\delta_y}^{\omega_x}(s) = \frac{N_{\delta_y}^{\omega_x}(s)}{\Delta(s)} = \frac{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{\Delta(s)} \tag{4-77}$$

其中

$$c_3 = \mu_x^{\delta_y}$$

$$c_2 = \mu_x^{\beta} z^{\delta_y} - (z^{\beta} + \mu_y^{\omega_y})\mu_x^{\delta_y} + \mu_x^{\omega_y}\mu_y^{\delta_y}$$

$$c_1 = (\mu_x^{\omega_y}\mu_y^{\beta} - \mu_x^{\beta}\mu_y^{\omega_y}) z^{\delta_y} + (z^{\beta}\mu_y^{\omega_y} - \mu_y^{\beta})\mu_x^{\delta_y} + (\mu_x^{\beta} - z^{\beta}\mu_x^{\omega_y})\mu_y^{\delta_y}$$

$$c_0 = (g\cos\vartheta_*/v_*)\operatorname{tg}\vartheta_*(\mu_y^{\beta}\mu_x^{\delta_y} - \mu_x^{\beta}\mu_y^{\delta_y})$$

(3)
$$W_{\delta_y}^{\omega_y}(s) = \frac{N_{\delta_y}^{\omega_y}(s)}{\Delta(s)} = \frac{e_3 s^3 + e_2 s^2 + e_1 s + e_0}{\Delta(s)} \tag{4-78}$$

其中

$$e_3 = \mu_y^{\delta_y}$$

$$e_2 = \mu_y^{\beta} z^{\delta_y} + \mu_y^{\omega_x}\mu_x^{\delta_y} - (z^{\beta} + \mu_x^{\omega_x})\mu_y^{\delta_y}$$

$$e_1 = (\mu_x^{\beta}\mu_y^{\omega_x} - \mu_x^{\omega_x}\mu_y^{\beta}) z^{\delta_y} + (\alpha_*\mu_y^{\beta} - z^{\beta}\mu_y^{\omega_x})\mu_x^{\delta_y} + (z^{\beta}\mu_x^{\omega_x} - \mu_y^{\beta})\mu_y^{\delta_y}$$

$$e_0 = (g\cos\vartheta_*/v_*)(\mu_y^{\beta}\mu_x^{\delta_y} - \mu_x^{\beta}\mu_y^{\delta_y})$$

(4)
$$W_{\delta_y}^{\gamma}(s) = \frac{N_{\delta_y}^{\gamma}(s)}{\Delta(s)} = \frac{f_2 s^2 + f_1 s + f_0}{\Delta(s)} \tag{4-79}$$

其中

$$f_2 = -\mu_x^{\delta_y} + \operatorname{tg}\vartheta_*\mu_y^{\delta_y}$$

$$f_1 = (\mu_y^{\beta}\operatorname{tg}\vartheta_* - \mu_x^{\beta}) z^{\delta_y} + (z^{\beta} + \mu_y^{\omega_y} + \mu_y^{\omega_x}\operatorname{tg}\vartheta_*)\mu_x^{\delta_y} + (-\mu_x^{\omega_y} - z^{\beta}\operatorname{tg}\vartheta_* + \mu_x^{\omega_x}\operatorname{tg}\vartheta_*)\mu_y^{\delta_y}$$

$$f_0 = (\mu_x^{\beta}\mu_y^{\omega_y} - \mu_x^{\omega_y}\mu_y^{\beta} + \mu_x^{\beta}\mu_y^{\omega_x}\operatorname{tg}\vartheta_* - \mu_x^{\omega_x}\mu_y^{\beta}\operatorname{tg}\vartheta_*) z^{\delta_y} + (\mu_y^{\beta} - z^{\beta}\mu_y^{\omega_y} + \alpha_*\mu_y^{\beta}\operatorname{tg}\vartheta_* + z^{\beta}\mu_y^{\omega_x})\mu_x^{\delta_y} + (z^{\beta}\mu_x^{\omega_y} - \alpha_*\mu_x^{\beta} + z^{\beta}\mu_x^{\omega_x}\operatorname{tg}\vartheta_* - \alpha_*\mu_x^{\beta}\operatorname{tg}\vartheta_*)\mu_y^{\delta_y}$$

(5) 其它传递函数

根据非耦合方程（4-63）可以得到其它的传递函数如下：

$$\begin{aligned}
W_{\delta_y}^{\psi}(s) &= \frac{1}{\cos\vartheta_*} \cdot \frac{1}{s} \cdot W_{\delta_y}^{\omega_y}(s) \\
W_{\delta_y}^{\psi_s}(s) &= W_{\delta_y}^{\psi}(s) - \frac{1}{\cos\theta_*}[W_{\delta_y}^{\beta}(s) - \sin\alpha_* W_{\delta_y}^{\gamma}(s)] \\
W_{\delta_y}^{z_D}(s) &= -v_*\cos\theta_* \cdot \frac{1}{s} \cdot W_{\delta_y}^{\psi_s}(s) \\
W_{\delta_y}^{\gamma_s}(s) &= \operatorname{tg}\theta_* W_{\delta_y}^{\beta}(s) + \frac{\cos\vartheta_*}{\cos\theta_*} W_{\delta_y}^{\gamma}(s)
\end{aligned} \tag{4-80}$$

当以副翼偏角δ_x作为输入时，传递函数同上，只要把 z^{δ_y}、$\mu_x^{\delta_y}$、$\mu_y^{\delta_y}$改换成 0 、$\mu_x^{\delta_x}$、$\mu_y^{\delta_x}$。

§6　惯性和气动数据的换算

6-1　两个机体坐标系

在实际工作中常常有必要把惯性数据和气动数据由一个机体坐标系换算到另一个机体坐标系。例如由给定的机体坐标系到主惯性轴系，由给定的机体轴系到稳定性轴系（见§7）。现在来推导需用的换算公式。

由于机体坐标系的轴z_i总是垂直于飞行器对称平面的，因而是唯一的，所以不同的机体坐标系的差别只是在于轴x之间或轴y之间。现在设想有两个机体坐标系$Ox_1y_1z_1$和$Ox_2y_2z_2$，其中z_1与z_2重合，x_1y_1与x_2y_2的相对位置如图4-2所示。

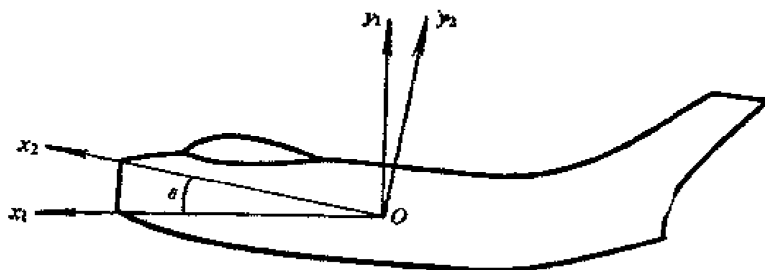


图4-2　两个机体坐标系

显然，由坐标系$Ox_1y_1z_1$到$Ox_2y_2z_2$的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{B}_1^2=\mathbf{B}_z(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\cos\varepsilon & \sin\varepsilon & 0\\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4-81}$$

利用式（4-81），可以直接得到角速度和力矩的换算公式。角速度

$$\left.\begin{aligned}\omega_{x2}&=\omega_{x1}\cos\varepsilon+\omega_{y1}\sin\varepsilon\\ \omega_{y2}&=-\omega_{x1}\sin\varepsilon+\omega_{y1}\cos\varepsilon\\ \omega_{z2}&=\omega_{z1}\end{aligned}\right\} \tag{4-82}$$

力矩

$$\left.\begin{aligned}M_{x2}&=M_{x1}\cos\varepsilon+M_{y1}\sin\varepsilon\\ M_{y2}&=-M_{x1}\sin\varepsilon+M_{y1}\cos\varepsilon\\ M_{z2}&=M_{z1}\end{aligned}\right\} \tag{4-83}$$

6-2　惯性矩的换算

对于转动惯量和惯性积的换算，首先要回顾一下第一章中的公式（1-40），可见惯性矩阵**I**把刚体动量矩矢量**H**的分量与刚体角速度矢量**ω**的分量相联系，因而此公式具有公式（1-18）的形式，所以惯性矩阵**I**可以按照一般公式（1-22）进行换算。在目前所考虑的具体情况下，$I_{yz}=I_{zx}=0$，于是写出

$$\begin{pmatrix}I_{x2} & -I_{x2y2} & 0\\ -I_{x2y2} & I_{y2} & 0\\ 0 & 0 & I_{z2}\end{pmatrix}=\mathbf{B}_1^2\begin{pmatrix}I_{x1} & I_{x1y1} & 0\\ -I_{x1y1} & I_{y1} & 0\\ 0 & 0 & I_{z1}\end{pmatrix}\mathbf{B}_2^1$$

把坐标变换公式（4-81）代入，展开后，得到惯性数据的换算公式

$$\left.\begin{aligned}
I_{x2} &= \cos^2\varepsilon I_{x1} + \sin^2\varepsilon I_{y1} - 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon I_{x1y1} \\
I_{y2} &= \sin^2\varepsilon I_{x1} + \cos^2\varepsilon I_{y1} + 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon I_{x1y1} \\
I_{z2} &= I_{z1} \\
I_{x2y2} &= -\sin\varepsilon\cos\varepsilon(I_{y1} - I_{x1}) + (\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon) I_{x1y1}
\end{aligned}\right\} \tag{4-84}$$

6-3 气动导数的换算

由角速度 ω_x、ω_y、ω_z 引起的力矩 ΔM_x、ΔM_y、ΔM_z 可以表示成［根据式（4-12）、（4-13）和（4-14）］

$$\begin{pmatrix}\Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x^{\omega_x} & M_x^{\omega_y} & 0 \\ M_y^{\omega_x} & M_y^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 0 & M_z^{\omega_z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix}$$

此关系式具有式（1-18）的形式及相应的物理意义，所以可以按式（1-22）进行换算

$$\begin{pmatrix}(M_x^{\omega_x})_2 & (M_x^{\omega_y})_2 & 0 \\ (M_y^{\omega_x})_2 & (M_y^{\omega_y})_2 & 0 \\ 0 & 0 & (M_z^{\omega_z})_2\end{pmatrix} = \mathbf{B}_1^2 \begin{pmatrix}(M_x^{\omega_x})_1 & (M_x^{\omega_y})_1 & 0 \\ (M_y^{\omega_x})_1 & (M_y^{\omega_y})_1 & 0 \\ 0 & 0 & (M_z^{\omega_z})_1\end{pmatrix} \mathbf{B}_2^1$$

考虑式（4-81），展开后得到

$$\begin{aligned}
(M_x^{\omega_x})_2 &= (M_x^{\omega_x})_1\cos^2\varepsilon + (M_x^{\omega_y} + M_y^{\omega_x})_1\sin\varepsilon\cos\varepsilon + (M_y^{\omega_y})_1\sin^2\varepsilon \\
(M_x^{\omega_y})_2 &= (M_x^{\omega_y})_1\cos^2\varepsilon + (M_y^{\omega_y} - M_x^{\omega_x})_1\sin\varepsilon\cos\varepsilon - (M_y^{\omega_x})_1\sin^2\varepsilon \\
(M_y^{\omega_x})_2 &= (M_y^{\omega_x})_1\cos^2\varepsilon + (M_y^{\omega_y} - M_x^{\omega_x})_1\sin\varepsilon\cos\varepsilon - (M_x^{\omega_y})_1\sin^2\varepsilon \\
(M_y^{\omega_y})_2 &= (M_y^{\omega_y})_1\cos^2\varepsilon - (M_x^{\omega_y} + M_y^{\omega_x})_1\sin\varepsilon\cos\varepsilon + (M_x^{\omega_x})_1\sin^2\varepsilon \\
(M_z^{\omega_z})_2 &= (M_z^{\omega_z})_1
\end{aligned} \tag{4-85}$$

由角速度引起的机体轴上的气动力为

$$\begin{pmatrix}-\Delta Q_t \\ \Delta Y_t \\ \Delta Z_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q_t^{\omega_z} \\ 0 & 0 & Y_t^{\omega_z} \\ Z_t^{\omega_x} & Z_t^{\omega_y} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix}$$

注意这里 ω_x、ω_y、ω_z 是 ω_{xt}、ω_{yt}、ω_{zt} 的省写。同样地，利用公式（1-22），展开后得到

$$\left.\begin{aligned}
(Q_t^{\omega_z})_2 &= (Q_t^{\omega_z})_1\cos\varepsilon - (Y_t^{\omega_z})_1\sin\varepsilon \\
(Y_t^{\omega_z})_2 &= (Q_t^{\omega_z})_1\sin\varepsilon + (Y_t^{\omega_z})_1\cos\varepsilon \\
(Z_t^{\omega_x})_2 &= (Z_t^{\omega_x})_1\cos\varepsilon + (Z_t^{\omega_y})_1\sin\varepsilon \\
(Z_t^{\omega_y})_2 &= -(Z_t^{\omega_x})_1\sin\varepsilon + (Z_t^{\omega_y})_1\cos\varepsilon
\end{aligned}\right\} \tag{4-86}$$

通常有用的只是最后两个式子。

至于由角速度引起的气流坐标系中的气动力，虽然也能写成

$$\begin{pmatrix}-Q \\ Y \\ Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q^{\omega_z} \\ 0 & 0 & Y^{\omega_z} \\ Z^{\omega_x} & Z^{\omega_y} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix}$$

但由于 $-Q$、Y、Z和ω_x、ω_y、ω_z分别属于不同的坐标系，所以不能利用公式（1-22），必须另外推导如下。对于两个机体坐标系（1和2），可以写出

$$\begin{pmatrix} Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q^{\omega_z} \\ 0 & 0 & Y^{\omega_z} \\ Z^{\omega_x} & Z^{\omega_y} & 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}_2$$

和

$$\begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q^{\omega_z} \\ 0 & 0 & Y^{\omega_z} \\ Z^{\omega_x} & Z^{\omega_y} & 0 \end{pmatrix}_1 \mathbf{B}_2^1 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}_2$$

比较以上两式，得到矩阵关系式，展开后得到

$$\left.\begin{aligned} (Q^{\omega_z})_2 &= (Q^{\omega_z})_1 \\ (Y^{\omega_z})_2 &= (Y^{\omega_z})_1 \\ (Z^{\omega_x})_2 &= (Z^{\omega_x})_1\cos\varepsilon + (Z^{\omega_y})_1\sin\varepsilon \\ (Z^{\omega_y})_2 &= -(Z^{\omega_x})_1\sin\varepsilon + (Z^{\omega_y})_1\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}87)$$

注意，操纵面偏角 δ_x、δ_y、δ_z 实际上与机体坐标系的选取是无关的，因而操纵力矩导数（$M_x^{\delta_x}$、$M_x^{\delta_y}$等等）也不能按公式（1-22）进行换算。推导如下：

$$\begin{pmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} M_x^{\delta_x} & M_x^{\delta_y} & 0 \\ M_y^{\delta_x} & M_y^{\delta_y} & 0 \\ 0 & 0 & M_z^{\delta_z} \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix}$$

和

$$\mathbf{B}_1^2 \begin{pmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} M_x^{\delta_x} & M_x^{\delta_y} & 0 \\ M_y^{\delta_x} & M_y^{\delta_y} & 0 \\ 0 & 0 & M_z^{\delta_z} \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix}$$

比较以上两式，得到矩阵关系式，展开后得到

$$\left.\begin{aligned} (M_x^{\delta_x})_2 &= (M_x^{\delta_x})_1\cos\varepsilon + (M_y^{\delta_x})_1\sin\varepsilon \\ (M_x^{\delta_y})_2 &= (M_x^{\delta_y})_1\cos\varepsilon + (M_y^{\delta_y})_1\sin\varepsilon \\ (M_y^{\delta_x})_2 &= -(M_x^{\delta_x})_1\sin\varepsilon + (M_y^{\delta_x})_1\cos\varepsilon \\ (M_y^{\delta_y})_2 &= -(M_x^{\delta_y})_1\sin\varepsilon + (M_y^{\delta_y})_1\cos\varepsilon \\ (M_z^{\delta_z})_2 &= (M_z^{\delta_z})_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}88)$$

由侧滑角 β 引起的气动力矩也具有上述性质，因此有

$$\left.\begin{aligned} (M_x^{\beta})_2 &= (M_x^{\beta})_1\cos\varepsilon + (M_y^{\beta})_1\sin\varepsilon \\ (M_y^{\beta})_2 &= -(M_x^{\beta})_1\sin\varepsilon + (M_y^{\beta})_1\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}89)$$

最后，由 δ_y 和 β 引起的气动侧力，显然是

$$\left.\begin{aligned} (Z_t^{\delta_y})_2 &= (Z_t^{\delta_y})_1 \\ (Z_t^{\beta})_2 &= (Z_t^{\beta})_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}90)$$

总而言之，气动导数的换算公式是各不相同的，必须十分仔细地考虑。

§7　按稳定性坐标系建立的方程式的特点

在美英飞行力学文献中最流行的做法是采用稳定性坐标系（参看文献[1]、[2]、[3]）$Ox_wy_wz_w$（见图4-3）。它的原点O仍在飞行器质心；轴x_w与未扰动运动的速度矢量V_*在飞行器对称平面投影方向一致；轴y_w在对称平面内，垂直于轴x_w，指向上方；轴z_w垂直于对称平面，指向右方。在扰动运动中它是与飞行器固连的，所以在实质上稳定性坐标系是一种特殊的机体坐标系。显然，稳定性坐标系S_w与机体坐标系S_t的轴x_w和x_t之间（因而轴y_w和y_t之间）相差一个按机体坐标系衡量的未扰动迎角α_{t*}。

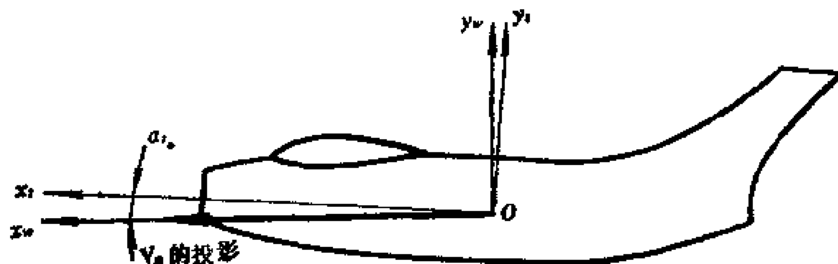


图4-3　稳定性坐标系的定义

以稳定性坐标系为基准，则未扰动迎角$\alpha_*=0$，因而横侧小扰动方程略有简化[参看方程（4-62）和（4-66）]。但必须把惯性矩和惯性积以及各个气动导数由原来的机体坐标系换算到稳定性坐标系，为此而采用的公式是式（4-84）至式（4-90）。其中，如果“1”代表原来机体坐标系（t），“2”代表稳定性坐标系（w），则应把ε改换成$-\alpha_{t*}$。而且这样得到的方程组也不是标准形式。如果要化成标准（矩阵）形式，还必须再采用修正导数法。

最后指出，无论怎样选取机体坐标系（即普通机体系或惯性主轴系或稳定性轴系），对本章所建立的纵向小扰动方程组都毫无影响。因为切向力和法向力方程是沿航迹坐标系的，与机体坐标系的选择无关，而俯仰力矩方程是绕机体系轴z的，但在不同的机体坐标系中轴z是一致的，所以纵向小扰动方程不受机体坐标系的选择的影响。当然，如果纵向运动的力方程是按机体坐标系建立的（参看文献[3]、[2]），则机体坐标系的选择就会对纵向小扰动方程的形式有所影响了。

第五章　在非平静大气中飞行器的运动方程

§1　关于风对飞行器运动的影响

在第二章§1中已指出，飞行器的对地速度（飞行器质心相对于大地的速度，简称地速）**v**、对空速度（飞行器质心相对于空气的速度）**u**与风速**w**有如下关系（见图5-1）：

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w} \tag{5-1}$$

虽然在第二章中定义坐标系和运动参数时已经考虑了地速与空速的差别，但在建立运动方程时假定了大气是静止的，亦即风速 $\mathbf{w}=0$。

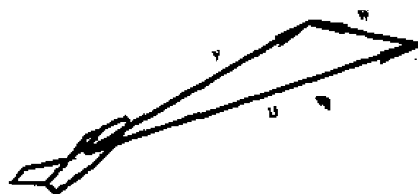


图5-1　地速v、空速u与风速w的关系

实际上大气往往是不平静的，即有风。风对飞行器的运动起作用，并因而产生多种多样的影响。例如，风影响飞行器的续航性能、起飞着陆性能、飞行器的平衡和操纵；风还影响飞行器受到的载荷，引起飞行中的颠簸，影响乘客的舒适性和结构的疲劳寿命；风的作用影响飞机驾驶员执行跟踪、射击等使命；至于风影响导弹的命中准确度更是明显的。所以对于飞行器的设计和使用来说，风的影响是十分重要的、不可忽视的问题。本章的目的就是建立在非平静大气中飞行器的运动方程，利用这些方程才有可能研究风对飞行的各方面的影响。这里仅限于平面大地的情况，当必要时读者不难将这些方程推广到球形大地的情况。

一个很重要的概念是：运动的惯性力决定于地速**v**，而作用在飞行器上的空气动力**R**和发动机推力**P**（火箭发动机除外）则决定于空速**u**。用式子表示，就是：

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{R}(u)+\mathbf{P}(u)+m\mathbf{g}$$

更具体地说，Mach 数、Reynolds 数以及气动系数c_x、c_y、c_z、m_x、m_y、m_z和速压q是由空速u决定的。

再回顾一下，在第二章定义的坐标系中，地面坐标系S_d和机体坐标系S_t是与风的存在无关的；航迹坐标系S_h是以地速**v**为基础的；而气流坐标系S_q和半机体坐标系S_b是以空速**u**为基础的。在八个角度中，偏航角ψ、俯仰角ϑ和滚转角γ与速度无关；航迹偏转角ψ_s和航迹倾角θ决定于地速**v**；迎角α和侧滑角β决定于空速**u**；速度滚转角γ_s仅在无风时才有意义，这时它是航迹坐标系S_h与气流坐标系S_q之间的唯一角度（见图2-5）。

在风对飞行的影响方面，有两类不同性质的问题。第一类问题是有规律的（虽然是假定的）风的作用下飞行器的运动。这属于确定性的问题；第二类问题是连续大气紊流对飞行器运动的影响。这属于随机性的问题，即系统对随机输入的响应问题。

另外，在运动方程的形式方面，有两种不同形式的运动方程。第一种是全量形式的运动方程。它对风速的大小没有任何限制。它既适用于确定性的风，也适用于随机过程的风。方

程中可以不仅反映风速本身，而且反映风速梯度。这种非线性的方程只能用数值方法解出；第二种是偏量形式（或小扰动形式）的方程。它仍以无风时的对称定常直线飞行作为基准状态；而把由风引起的附加力和力矩作为外加干扰项。当然这只适用于风速不大的情况。这种方程对于用频谱法解决飞行器对大气紊流的响应问题特别适宜，虽然它同时也适用于研究飞行器对确定性风（如离散突风）的响应。

本章§2推导全量形式的在非平静大气中飞行器的运动方程，但其中未考虑风梯度的气动作用。§4则推导偏量形式的在非平静大气中飞行器的运动方程。§3讲述一种特殊情况，即在风切变中飞行器的运动方程，这一节的重要性不如§2和§4。

§2 在非平静大气中全量形式的运动方程

2-1 概 述

在关于风的影响的第一类问题（确定性问题）中，认为风速**w**是已知的，它可以是时间和位置的确定函数，并且以它在地面坐标系中的分量 w_{xd}、w_{yd}、w_{zd} 给出。在预先的运动计算中，风速的大小、方向以及变化规律是假定的，但这种假定必须以大气的实际情况、飞行器的设计条件和经验为依据，它或者是具有代表性的，或者是在设计中应予考虑的最严重情况。在对飞行试验结果进行复核计算时，风的数据应以试验中实际测量到的大气条件为依据。

本节建立在非平静大气中全量形式的飞行器运动方程，暂不考虑风的梯度的作用。也象在第二章那样，有几个不同的方案。下面分别讲述。

在所有方案中，第二章的转动动力学方程(2-41)和转动运动学方程（2-46）仍然保持不变。所以，仅列出质心移动的动力学方程、质心运动学方程以及有关的关系式。而且为了节省篇幅，仅写出矩阵形式。在实际应用时，读者自己可以把这些方程展开。

2-2 TT体系的运动方程

有风时，机体坐标系中的质心动力学方程（2-31）和质心运动学方程（2-44）仍然可用。转动动力学方程（2-41）和转动运动学方程（2-46）也仍然可用。

根据速度关系式（5-1）得到空速**u**在机体坐标系中的分量

$$\begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_{yt} \\ u_{zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xt} \\ v_{yt} \\ v_{zt} \end{pmatrix} - \mathbf{B}_d^t \begin{pmatrix} w_{xd} \\ w_{yd} \\ w_{zd} \end{pmatrix} \tag{5-2}$$

然后计算u，α，β［参看式（2-55）的推导］

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\alpha &= -\frac{u_{yt}}{u_{xt}} \\ \sin\beta &= \frac{u_{zt}}{u} \\ u &= \sqrt{u_{xt}^2 + u_{yt}^2 + u_{zt}^2} \end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

总之，整个体系由方程（2-31）、（2-44）、（2-41）、（2-46）、（5-2）、（5-3）组成。

可见，与无风时的运动方程相比，仅有少量的改动。在有风情况下采用这个方程体系是最为简便的。所以它是值得推荐的。

2-3 DT体系的运动方程

有风时为了把气动力由S_q变换到S_d，不能利用式（2-13）给出的矩阵$\mathbf{B}_q^d$，而必须通过S_t传递。所以地面坐标系S_d中的质心动力学方程应写成

$$m\begin{pmatrix} dv_{xd}/dt \\ dv_{yd}/dt \\ dv_{zd}/dt \end{pmatrix} = \mathbf{B}_t^d\left(\begin{pmatrix} P\cos\varphi_p \\ P\sin\varphi_p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{B}_q^t\begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5-4}$$

质心运动学方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_D}{dt} &= v_{xd} \\ \frac{dy_D}{dt} &= v_{yd} \\ \frac{dz_D}{dt} &= v_{zd} \end{aligned}\right\} \tag{5-5}$$

转动方程（2-41）和（2-46）仍保留。

利用下式求空速分量

$$\begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_{yt} \\ u_{zt} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_d^t\begin{pmatrix} v_{xd} - w_{xd} \\ v_{yd} - w_{yd} \\ v_{zd} - w_{zd} \end{pmatrix} \tag{5-6}$$

然后利用式（5-3）计算α，β，u。

整个方程体系由式（5-4）、（5-5）、（2-41）、（2-46）、（5-6）、（5-3）组成。这个体系比 TT 体系复杂一些，但某些情况下还是可以采用的。

2-4 HT体系的运动方程

有风时，γ_c已无意义，由式（2-10）表示的变换矩阵$\mathbf{B}_q^h$也不再存在，所以质心动力学方程应写成如下形式：

$$m\begin{pmatrix} dv/dt \\ v d\theta/dt \\ -v\cos\theta\, d\psi_s/dt \end{pmatrix} = \mathbf{B}_d^h\,\mathbf{B}_t^d\left(\begin{pmatrix} P\cos\varphi_p \\ P\sin\varphi_p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{B}_q^t\begin{pmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) + \mathbf{B}_d^h\begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5-7}$$

方程（2-43）、（2-41）、（2-46）仍然保留。但几何关系式（2-48）和（2-49）已不成立。

机体坐标系中的速度分量按如下公式计算：

$$\begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_{yt} \\ u_{zt} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_d^t\left(\mathbf{B}_h^d\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_{xd} \\ w_{yd} \\ w_{zd} \end{pmatrix}\right) \tag{5-8}$$

然后按式（5-3）计算α，β，u。

整个方程体系由式（5-7）、（2-43）、（2-41）、（2-46）、（5-8）、（5-3）组成。

方程（5-7）的展开形式极为复杂。所以这个方程体系是最复杂的，建议不要使用它。

2.5 有风时飞行器的对称运动方程

下面列出有风时飞行器在铅垂平面内对称运动的方程组，从这里容易了解各个方程体系的实质和特点。而且这也是实践中常用的。

坐标系、力和运动变量在图5-2中表示。

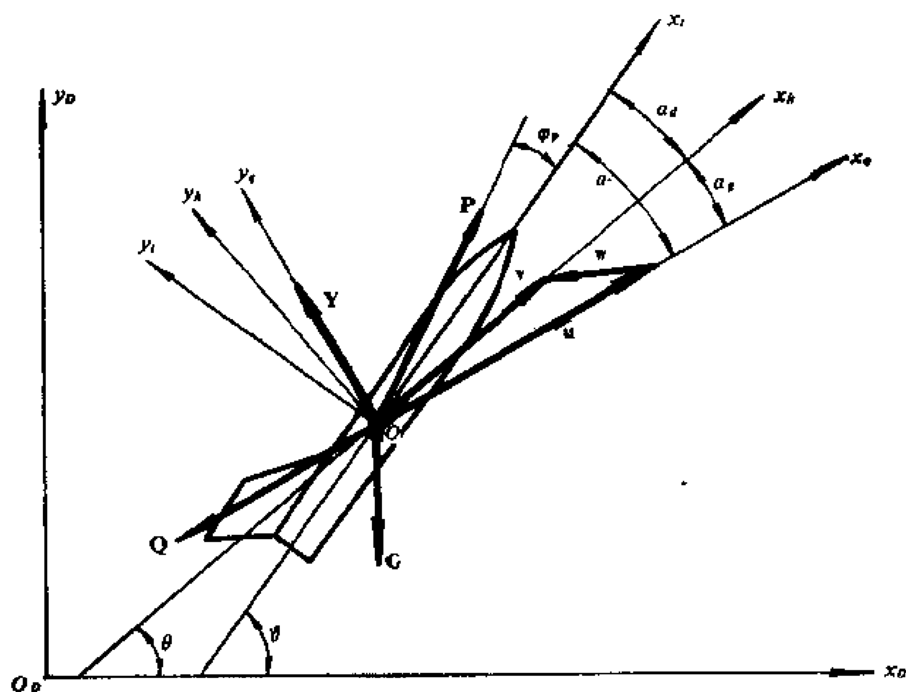


图5-2 有风时飞行器的对称运动

1. TT 体系

$$
\left.
\begin{aligned}
& m\left(\frac{dv_{xt}}{dt}-\omega_z v_{yt}\right)=P\cos\varphi_P-Q\cos\alpha+Y\sin\alpha-mg\sin\vartheta \\
& m\left(\frac{dv_{yt}}{dt}+\omega_z v_{xt}\right)=P\sin\alpha+Q\sin\alpha+Y\cos\alpha-mg\cos\vartheta \\
& I_z\frac{d\omega_z}{dt}=\sum M_z \\
& \frac{dx_D}{dt}=v_{xd}=v_{xt}\cos\vartheta-v_{yt}\sin\vartheta \\
& \frac{dy_D}{dt}=v_{yd}=v_{xt}\sin\vartheta+v_{yt}\cos\vartheta \\
& \frac{d\vartheta}{dt}=\omega_z
\end{aligned}
\right\}
\tag{5-9}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
u_{xt} &= v_{xt} - w_{xd}\cos\vartheta - w_{yd}\sin\vartheta \\
u_{yt} &= v_{yt} + w_{xd}\sin\vartheta - w_{yd}\cos\vartheta \\
u &= \sqrt{u_{xt}^2 + u_{yt}^2} \\
\operatorname{tg}\alpha &= -\frac{u_{yt}}{u_{xt}} \\
v &= \sqrt{v_{xt}^2 + v_{yt}^2} \\
\sin\theta &= \frac{v_{yd}}{v}
\end{aligned}\right\}
$$

2. DT 体系

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{dv_{xd}}{dt} &= P\cos(\vartheta - \varphi_p) - Q\cos(\vartheta - \alpha) - Y\sin(\vartheta - \alpha) \\
m\frac{dv_{yd}}{dt} &= P\sin(\vartheta + \varphi_p) - Q\sin(\vartheta - \alpha) + Y\cos(\vartheta - \alpha) - mg \\
I_z\frac{d\omega_z}{dt} &= \sum M_z \\
\frac{dx_D}{dt} &= v_{xd} \\
\frac{dy_D}{dt} &= v_{yd} \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \\
u_{xt} &= (v_{xd} - w_{xd})\cos\vartheta + (v_{yd} - w_{yd})\sin\vartheta \\
u_{yt} &= -(v_{xd} - w_{xd})\sin\vartheta + (v_{yd} - w_{yd})\cos\vartheta \\
u &= \sqrt{u_{xt}^2 + u_{yt}^2} \\
\operatorname{tg}\alpha &= -\frac{u_{yt}}{u_{xt}} \\
v &= \sqrt{v_{xd}^2 + v_{yd}^2} \\
\operatorname{tg}\theta &= \frac{v_{yd}}{v_{xd}}
\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}10)
$$

3. HT体系

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= P\cos(\vartheta - \theta + \varphi_p) - Q\cos(\vartheta - \theta - \alpha) - \\
&\quad - Y\sin(\vartheta - \theta - \alpha) - mg\sin\theta \\
mv\frac{d\theta}{dt} &= P\sin(\vartheta - \theta + \varphi_p) - Q\sin(\vartheta - \theta - \alpha) + \\
&\quad + Y\cos(\vartheta - \theta - \alpha) - mg\cos\theta \\
I_z\frac{d\omega_z}{dt} &= \sum M_z
\end{aligned}\right.
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_D}{dt}=v_{xd}=v\cos\theta\\
&\frac{dy_D}{dt}=v_{yd}=v\sin\theta\\
&\frac{d\vartheta}{dt}=\omega_z\\
&u_{xt}=(v_{xd}-w_{xd})\cos\vartheta+(v_{yd}-w_{yd})\sin\vartheta\\
&u_{yt}=-(v_{xd}-w_{xd})\sin\vartheta+(v_{yd}-w_{yd})\cos\vartheta\\
&u=\sqrt{u_{xt}^2+u_{yt}^2}\\
&\mathrm{tg}\alpha=-\frac{u_{yt}}{u_{xt}}
\end{aligned}\right\}\tag{5-11}$$

§ 3 有风切变时的运动方程

3-1 概 述

在地面附近，由于空气粘性的作用，风速往往是不均匀的，形成如图5-3所示的风剖面。这种现象称为风切变。实践表明，风切变对飞行器的着陆进場飞行有重大的影响。

这时，水平风速w是高度h的函数

$$w=w(h)\tag{5-12}$$

只要给定了上述函数关系，这就对应于在已知风場中飞行的情况，完全可以采用本章§2中建立的有风时的运动方程组，计算和分析飞行器的运动。

在理论分析中应用较广的另一种方法是考虑风切变的影响建立飞行器的小扰动线化方程。

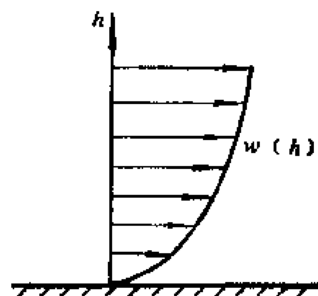


图5-3 风切变

3-2 考虑风切变时的纵向运动方程

我们仅研究风切变对纵向运动的影响。

飞行的地速$\mathbf{v}$、空速$\mathbf{u}$与风速$\mathbf{w}$的关系仍然是式（5-1）。

几何关系为

$$\vartheta=\theta_u+\alpha\tag{5-13}$$

其中 θ_u是空速$\mathbf{u}$对水平面的倾斜角（见图5-4）。

把式（5-1）投影到气流坐标系中，有

$$\begin{pmatrix}v_{xq}\\v_{yq}\\v_{zq}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{xq}\\u_{yq}\\u_{zq}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_{xq}\\w_{yq}\\w_{zq}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w\cos\theta_u\\-w\sin\theta_u\\0\end{pmatrix}$$

应用第一章中质心运动的一般方程（1-36），并且取气流坐标系作为其中的参考系，它的角速度分量为

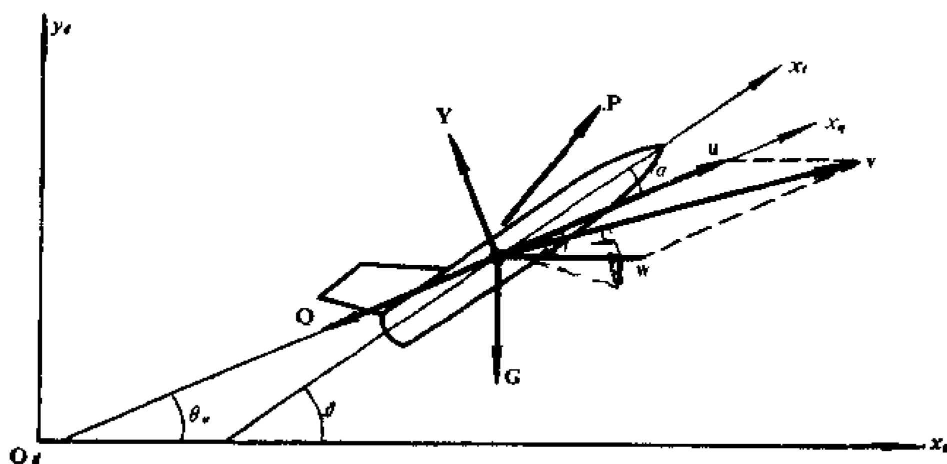


图5-4 速度和作用力

$$\begin{pmatrix} \omega_{q\cdot xq} \\ \omega_{q\cdot yq} \\ \omega_{q\cdot zq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_u \end{pmatrix}$$

于是写出

$$m\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u+w\cos\theta_u \\ -w\sin\theta_u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_u \end{pmatrix}^{ss}\begin{pmatrix} u+w\cos\theta_u \\ -w\sin\theta_u \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} F_{xq} \\ F_{yq} \\ F_{zq} \end{pmatrix}$$

注意其中上标ss表示斜对称矩阵。上式展开后得到

$$m\begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} + \dfrac{dw}{dt}\cos\theta_u \\ -\dfrac{dw}{dt}\sin\theta_u + u\dfrac{d\theta_u}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\cos(\alpha+\varphi_p) - Q - mg\sin\theta_u \\ P\sin(\alpha+\varphi_p) + Y - mg\cos\theta_u \\ 0 \end{pmatrix}$$

显然，其中第三个方程可以抛弃。

由于

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dh}\frac{dh}{dt}$$

而在风速为水平的情况下，有

$$\frac{dh}{dt} = u\sin\theta_u$$

并且引用符号

$$\eta = \frac{dw}{dh}$$

表示在给定高度上水平风速的铅垂梯度。于是上述方程可以化成

$$\left.\begin{aligned}\eta u\sin\theta_u\cos\theta_u + g\sin\theta_u\Big) &= P\cos(\alpha+\varphi_p) - Q\\ -\eta u\sin^2\theta_u + g\cos\theta_u\Big) &= P\sin(\alpha+\varphi_p) + Y\end{aligned}\right\} \tag{5-14}$$

$$\begin{aligned}J_z\frac{d\omega_z}{dt} &= M_z - Pe_p\\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z\\ \frac{dh}{dt} &= u\sin\theta_u\\ \alpha &= \vartheta - \theta_u\end{aligned} \tag{5-15}$$

3-3 风切变下的线化方程

按第四章中采用的一般方法，把方程（5-14）和（5-15）线性化，其结果是

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta u}{dt} &= \left\{\frac{1}{m}\left[P^v\cos(\alpha_*+\varphi_p) - Q^v\right] - \frac{1}{2}\eta\sin 2\theta_{u*}\right\}\Delta u +\\
&+ \frac{1}{m}\left[-P_*\sin(\alpha_*+\varphi_p) - Q^\alpha\right]\Delta\alpha - (\eta u_*\cos 2\theta_{u*} + g\cos\theta_{u*})\Delta\theta_u +\\
&+ \frac{1}{m}\left[P^h\cos(\alpha_*+\varphi_p) - Q^h\right]\Delta h - \frac{1}{m}Q^{\delta_z}\Delta\delta_z\\
\frac{d\Delta\theta_u}{dt} &= \left\{\frac{1}{mu_*}\left[P^v\sin(\alpha_*+\varphi_p) + Y^v\right] + \frac{1}{u_*}\eta\sin^2\theta_{u*}\right\}\Delta u +\\
&+ \frac{1}{mu_*}\left[P_*\cos(\alpha_*+\varphi_p) + Y^\alpha\right]\Delta\alpha + \left(\frac{g}{u_*}\sin\theta_{u*} + \eta\sin 2\theta_{u*}\right)\Delta\theta_u +\\
&+ \frac{1}{mu_*}\left[P^h\sin(\alpha_*+\varphi_p) + Y^h\right]\Delta h + \frac{1}{mu_*}Y^{\delta_z}\Delta\delta_z\\
\frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= \frac{1}{J_z}(M_z^v - P^v e_p)\Delta u + \frac{1}{J_z}M_z^\alpha\Delta\alpha + \frac{1}{J_z}M_z^{\dot\alpha}\Delta\dot\alpha +\\
&+ \frac{1}{J_z}M_z^{\omega_z}\Delta\omega_z + \frac{1}{J_z}(M_z^h - P^h e_p)\Delta h + \frac{1}{J_z}M_z^{\delta_z}\Delta\delta_z\\
\frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z\\
\frac{d\Delta h}{dt} &= \sin\theta_{u*}\Delta u + u_*\cos\theta_{u*}\Delta\theta_u\\
\Delta\alpha &= \Delta\vartheta - \Delta\theta_u
\end{aligned} \tag{5-16}$$

显然，方程中未考虑发动机的油门控制。

引用第四章式（4-38）所定义的纵向动力学导数符号x^v，x^α，…，$\mu_z^{\delta_z}$，但其中的v_*现在应改成u_*。于是可以把方程（5-16）写成简明形式，然后再化成状态方程式的标准形式

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\\ \Delta h\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}
x^v-\frac{1}{2}\eta\sin 2\theta_{u*} & x^\alpha-g\cos\theta_{u*}+\eta u_*\cos 2\theta_{u*} & 0 & -g\cos\theta_{u*}-\eta u_*\cos 2\theta_{u*} & x^h\\
-\left(y^v+\frac{\eta}{u_*}\sin^2\theta_{u*}\right) & -y^\alpha+\frac{g}{u_*}\sin\theta_{u*}+\eta\sin 2\theta_{u*} & 1 & -\frac{g}{u_*}\sin\theta_{u*}-\eta\sin 2\theta_{u*} & -y^h\\
\mu_z^v-\mu_z^{\dot\alpha}\left(y^v+\frac{\eta}{u_*}\sin^2\theta_{u*}\right) & \mu_z^\alpha-\mu_z^{\dot\alpha}\left(y^\alpha-\frac{g}{u_*}\sin\theta_{u*}-\eta\sin 2\theta_{u*}\right) & \mu_z^{\omega_z}+\mu_z^{\dot\alpha} & -\mu_z^{\dot\alpha}\left(\frac{g}{u_*}\sin\theta_{u*}+\eta\sin 2\theta_{u*}\right) & \mu_z^h-\mu_z^{\dot\alpha}y^h\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\sin\theta_{u*} & -u_*\cos\theta_{u*} & 0 & u_*\cos\theta_{u*} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta\alpha\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\\ \Delta h\end{pmatrix}+
\begin{pmatrix}x^{\delta_z}\\ -y^{\delta_z}\\ \mu_z^{\delta_z}-\mu_z^{\dot\alpha}y^{\delta_z}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Delta\delta_z
\tag{5-17}
$$

这个方程组有如下几点值得注意：

第一，与第四章的方程组相比，除了状态变量中的 Δv 改换成空速增量 Δu 以外，系统矩阵中若干个元素加进了包含η的附加项。在 $\eta=0$（即无风切变）时，两组方程就重合了。

第二，这里所有导数的含义及表达式均与通常情况的相同。特别是Y^h、Q^h、M_z^h仅仅与大气密度梯度 ρ^h 和音速梯度 a^h 有关，并不涉及风速梯度dw/dh。当ρ^h和a^h可以忽略时，变量Δh可以去掉。

第三，风速梯度η是有正负号意义的。在图5-3和图5-4所示的情况下，η正为。

第四，即使基准运动是水平飞行，即$\theta_{u*}=0$，风切变仍然对飞行器的动态特性有影响。

§ 4　在非平静大气中偏量形式的运动方程

4-1　概　述

关于大气紊流对飞行的影响，是一个十分复杂的问题。它包括：大气紊流的本质及其特性——各个方向的紊流速度的频谱特性——的数学描述，在大气紊流中飞行的飞行器的运动方程的建立，以及作为线性系统的飞行器的响应量的频谱和各统计特性的计算方法。其中主要问题必须应用随机过程理论才能解决。本书仅研究上述的第二个问题，即在大气紊流中飞行器的运动方程的建立。

通常在研究飞行器对大气紊流的响应时，为了便于处理，假设大气紊流是Gauss型的（即服从正态分布规律），平稳的，均匀的，各向同性的。此外，与飞行速度相比，可以认为紊流速度場是“冻结的”，即速度分布不随时间而变化。对于运动方程的建立来说，仅仅最后这个假设是必要的。

为了研究飞行器对大气紊流的响应，通常采用飞行器的偏量形式的运动方程，即线化小扰动方程，并且把大气紊流速度引起的附加气动力和力矩作为扰动项加到方程中去。

现在，仍然用 v 代表飞行器的地速，用 w 代表风速，在这里就是紊流速度。按照上述的“冻结場”假设，如果取固定在地面上的固定坐标系 $x_d y_d z_d$，则紊流速度仅仅是坐标 x_d、y_d、z_d的函数，而不是时间 t 的函数。但是如果取随同飞行器一同前进的活动坐标系$Oxyz$，则紊流速度是坐标和时间的函数

$$w_x,\ w_y,\ w_z=f(x,\ y,\ z,\ t) \tag{5-18}$$

现在这个活动坐标系只是随着飞行器一同前进的，我们并不仔细地追究它究竟是机体坐标系还是航迹坐标系。

由于飞行器在 y 方向（即大体上铅垂方向）的尺寸比其它两个方向上的尺寸小得多，所以可以不考虑紊流速度在 y 方向的变化，即

$$w_x,\ w_y,\ w_z=f(x,\ z,\ t) \tag{5-19}$$

这样处理可以使问题大大简化。

当所考虑的频率范围不是很高时，即大致对应于飞行器的刚体运动频率（短周期模态频率），而不涉及结构振动频率时，可以进一步把紊流速度場在飞行器质心附近线性化，亦即表示成

$$\left.\begin{aligned}w_x(x,z,t)&=w_x(0,0,t)+\frac{\partial w_x}{\partial x}(0,0,t)x+\frac{\partial w_x}{\partial z}(0,0,t)z\\w_y(x,z,t)&=w_y(0,0,t)+\frac{\partial w_y}{\partial x}(0,0,t)x+\frac{\partial w_y}{\partial z}(0,0,t)z\\w_z(x,z,t)&=w_z(0,0,t)+\frac{\partial w_z}{\partial x}(0,0,t)x+\frac{\partial w_z}{\partial z}(0,0,t)z\end{aligned}\right\}\tag{5-20}$$

为了以后书写方便起见，采用如下的简化符号：

$$\left.\begin{aligned}&w_x=w_x(0,0,t),\ w_y=w_y(0,0,t),\ w_z=w_z(0,0,t)\\&w_{xx}=\frac{\partial w_x}{\partial x}(0,0,t),\qquad w_{xz}=\frac{\partial w_x}{\partial z}(0,0,t)\\&w_{yx}=\frac{\partial w_y}{\partial x}(0,0,t),\qquad w_{yz}=\frac{\partial w_y}{\partial z}(0,0,t)\\&w_{zx}=\frac{\partial w_z}{\partial x}(0,0,t),\qquad w_{zz}=\frac{\partial w_z}{\partial z}(0,0,t)\end{aligned}\right\}\tag{5-21}$$

4-2 紊流速度的气动等价作用

大气紊流速度的作用实际上就是改变了飞行器上的相对气流，从而改变了飞行器所受到的气动力，而这种附加的气动力可以通过飞行器运动状态量的等价改变来表示。分析如下（见图5-5）。

x 方向的紊流速度 w_x 的作用就气动效果来说相当于减小前进速度，这个效果用 v_g 表示

$$v_g=-w_x\tag{5-22}$$

这里 w_x 是指在式（5-21）中规定的含意。

y 方向的紊流速度 w_y 的效果是增加迎角

$$\alpha_g=w_y/v_*\tag{5-23}$$

z 方向的紊流速度 w_z 引起等价的负的侧滑角

$$\beta_g=-w_z/v_*\tag{5-24}$$

紊流速度梯度 $\partial w_y/\partial x$，在气动效果方面相当于负的俯仰角速度

$$\omega_{zg}=-\partial w_y/\partial x=-w_{yx}\tag{5-25}$$

梯度 $\partial w_y/\partial z$ 相当于正的滚转角速度

$$\omega_{xg}=\partial w_y/\partial z=w_{yz}\tag{5-26}$$

梯度 $\partial w_z/\partial x$ 相当于正的偏航角速度

$$\omega_{yg1}=\partial w_z/\partial x=w_{zx}\tag{5-27}$$

梯度 $\partial w_x/\partial z$ 相当于负的偏航角速度

$$\omega_{yg2}=-\partial w_x/\partial z=-w_{xz}\tag{5-28}$$

以上两个偏航角速度的气动效果并不相同，所以用下标 1 和 2 相区别。对于无后掠机翼的飞行器来说，梯度 $\partial w_z/\partial x$ 主要影响垂直尾翼的气动力，而梯度 $\partial w_x/\partial z$ 主要影响机翼的气动力；对于后掠机翼来说，两种梯度都会影响机翼的气动力。因此，与两种等价角速度

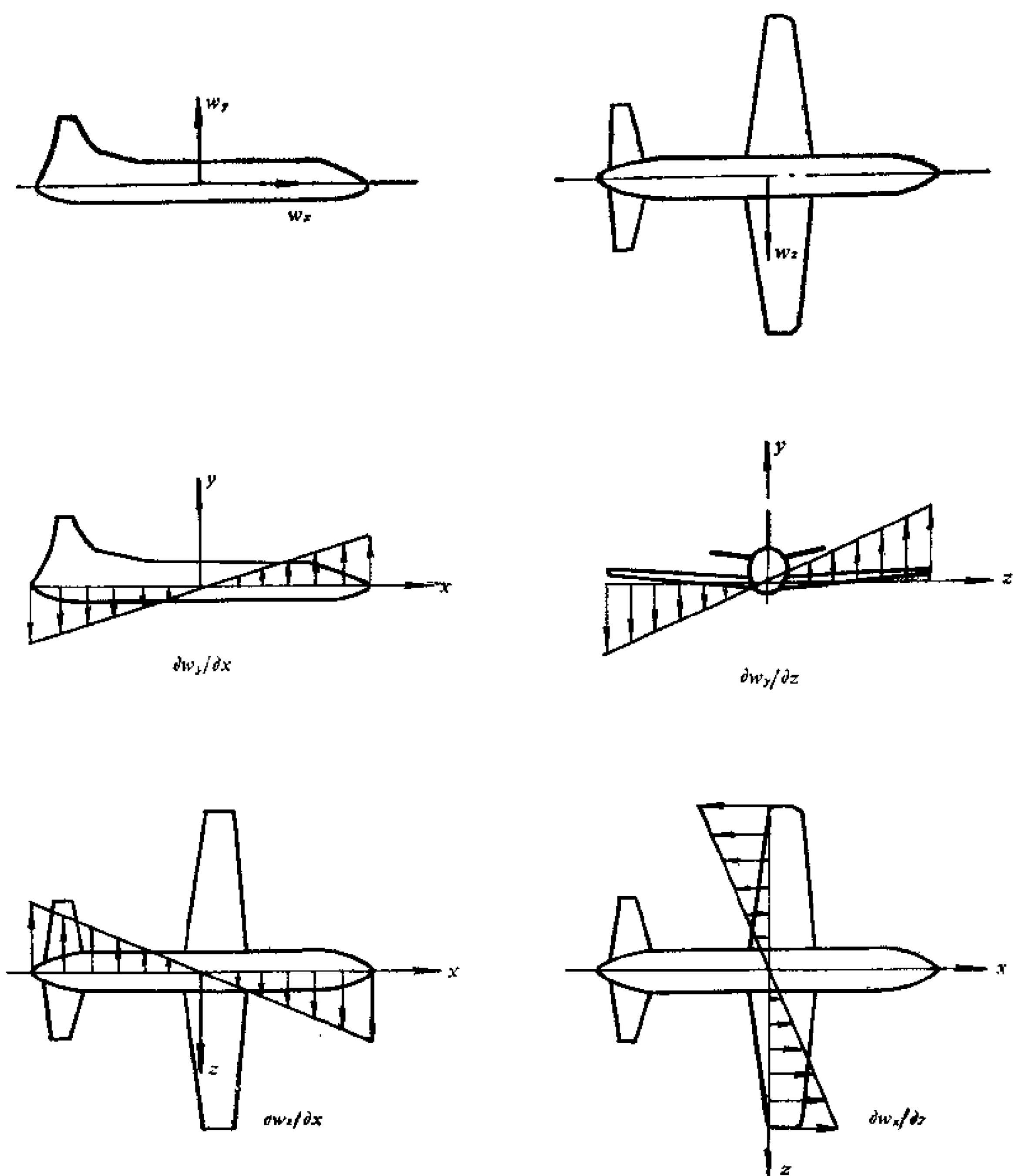


图5-5 大气紊流速度的气动效果

ω_{y2} 相连系的，要分别使用不同的气动导数：$M_x^{\omega_{y1}}$、$M_y^{\omega_{y1}}$、$M_x^{\omega_{y2}}$、$M_y^{\omega_{y2}}$。

梯度 $\partial w_x/\partial x$ 影响尾翼处的有效流速，但其效果通常可以忽略不计。

梯度 $\partial w_z/\partial z$ 的效果也可以忽略不计。

最后，还有

$$\dot{\alpha}_g = \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \frac{\partial (w_y/v_*)}{\partial t} = \frac{\partial w_y}{\partial (v_* t)}$$

所以

$$\dot{\alpha}_g = \partial w_y/\partial x = w_{yx} \tag{5-29}$$

4-3 纵向运动方程

取第四章中已经线化了的纵向方程（4-21）、（4-22）和（4-26），并把紊流速度的影响v_g、α_g、ω_{zg}、$\dot{\alpha}_g$的表达式（5-22）、（5-23）、(5-25)、(5-29）考虑进去，就能得到在大气紊流中的纵向线化方程。

方程（4-21）修改成

$$m\frac{d\Delta v}{dt}=[P^v(\Delta v-w_x)-P^h\Delta h-\Delta P_c]\cos(\alpha_*+\varphi_p)-$$

$$-P_*\sin(\alpha_*+\varphi_p)\Delta\alpha_d-\left[Q^v(\Delta v-w_x)+Q^h\Delta h+\right.$$

$$\left.+Q^\alpha\left(\Delta\alpha_d+\frac{w_y}{v_*}\right)+Q^{\delta_z}\Delta\delta_z\right]-mg\cos\theta_*\Delta\theta \qquad (5\text{-}30)$$

方程（4-22）成为

$$mv_*\frac{d\Delta\theta}{dt}=[P^v(\Delta v-w_x)+P^h\Delta h+\Delta P_c]\sin(\alpha_*+\varphi_p)+P_*\cos(\alpha_*+\varphi_p)\Delta\alpha_d+$$

$$+\left[Y^v(\Delta v-w_x)+Y^h\Delta h+Y^\alpha\left(\Delta\alpha_d+\frac{w_y}{v_*}\right)+Y^{\dot\alpha}(\Delta\dot\alpha_d+w_{yx})+\right.$$

$$\left.+Y^{\omega_z}(\Delta\omega_z-w_{yx})+Y^{\delta_z}\Delta\delta_z\right]+mg\sin\theta_*\Delta\theta \qquad (5\text{-}31)$$

方程（4-26）成为

$$I_z\frac{d\Delta\omega_z}{dt}=M_z^v(\Delta v-w_x)+M_z^h\Delta h+M_z^\alpha\left(\Delta\alpha_d+\frac{w_y}{v_*}\right)+$$

$$+M_z^{\dot\alpha}(\Delta\dot\alpha_d+w_{yx})+M_z^{\omega_z}(\Delta\omega_z-w_{yx})+M_z^{\delta_z}\Delta\delta_z-$$

$$-[P^v(\Delta v-w_x)+P^h\Delta h+\Delta P_c]e_p \qquad (5\text{-}32)$$

必须指出（见图5-2），这里v是飞行器的地速；θ是地速的倾角；而α_d是地速与机体纵轴之间的夹角，称为动力学迎角或惯性迎角。$\Delta\alpha_d$是它的迎角增量；$w_y/v_*=\alpha_g$是由紊流速度引起的迎角增量，所以$\Delta\alpha_d+\alpha_g=\Delta\alpha$就是气动迎角增量。其它的量$(\Delta v-w_x)$，$(\Delta\omega_z-w_{yx})$，$(\Delta\dot\alpha_d+w_{yx})$也有类似的意思。

现在，除了利用式（4-38）所定义的动力导数x^v，x^α，…以外，再补充定义两个动力导数

$$\left.\begin{aligned}x_\alpha^\alpha&=-Q^\alpha/m\\ y_\alpha^\alpha&=Y^\alpha/mv_*\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}33)$$

于是，方程（5-30）、（5-31）、（5-32），再加上另外三个方程，可以写成如下简明形式：

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta v}{dt} &= x^{v}\Delta v + x^{\alpha}\Delta\alpha_d - g\cos\theta_{*}\Delta\theta + x^{h}\Delta h + x^{\delta_z}\Delta\delta_z + \\
&\quad - x^{P}\Delta P_c - x^{v}w_x + x_a^{\alpha}\frac{w_y}{v_{*}} \\
\frac{d\Delta\theta}{dt} &= y^{v}\Delta v - y^{\alpha}\Delta\alpha_d + \frac{g}{v_{*}}\sin\theta_{*}\Delta\theta - y^{\dot{\alpha}}\frac{d\Delta\alpha_d}{dt} + y^{\omega_z}\Delta\omega_z + \\
&\quad + y^{h}\Delta h + y^{\delta_z}\Delta\delta_z + y^{P}\Delta P_c - y^{v}w_x + y_a^{\alpha}\frac{w_y}{v_{*}} + \\
&\quad + (y^{\dot{\alpha}} - y^{\omega_z})w_{yx} \\
\frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= \mu_z^{v}\Delta v + \mu_z^{\alpha}\Delta\alpha_d + \mu_z^{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha}_d + \mu_z^{\omega_z}\Delta\omega_z + \mu_z^{h}\Delta h + \mu_z^{\delta_z}\Delta\delta_z + \\
&\quad + \mu_z^{P}\Delta P_c - \mu_z^{v}w_x + \mu_z^{\alpha}\frac{w_y}{v_{*}} + (\mu_z^{\dot{\alpha}} - \mu_z^{\omega_z})w_{yx} \\
\frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z \\
\frac{d\Delta h}{dt} &= \sin\theta_{*}\Delta v + v_{*}\cos\theta_{*}\Delta\theta \\
\frac{d\Delta\alpha_d}{dt} &= \Delta\omega_z - \frac{d\Delta\theta}{dt}
\end{aligned}
\tag{5-34}
$$

如果忽略高度变化Δh的影响，并且忽略$y^{\dot{\alpha}}$和y^{ω_z}，则方程组（5-34）可以改写成如下的矩阵形式：

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha_d\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix}
x^{v} & x^{\alpha} + g\cos\theta_{*} & 0 & -g\cos\theta_{*}\\
-y^{v} & -y^{\alpha} + g\sin\theta_{*}/v_{*} & 1 & -g\sin\theta_{*}/v_{*}\\
\mu_z^{v} - \mu_z^{\dot{\alpha}}y^{v} & \mu_z^{\alpha} - \mu_z^{\dot{\alpha}}(y^{\alpha} - g\sin\theta_{*}/v_{*}) & \mu_z^{\omega_z} - \mu_z^{\dot{\alpha}} & -\mu_z^{\dot{\alpha}}g\sin\theta_{*}/v_{*}\\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\Delta v\\ \Delta\alpha_d\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix}
x^{\delta_z} & x^{P}\\
-y^{\delta_z} & -y^{P}\\
\mu_z^{\delta_z} - \mu_z^{\dot{\alpha}}y^{\delta_z} & \mu_z^{P} - \mu_z^{\dot{\alpha}}y^{P}\\
0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\Delta\delta_z\\ \Delta P_c\end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix}
-x^{v} & x_a^{\alpha}/v_{*} & 0\\
y^{v} & -y_a^{\alpha}/v_{*} & 0\\
-\mu_z^{v} - \mu_z^{\dot{\alpha}}y^{v} & (\mu_z^{\alpha} - \mu_z^{\dot{\alpha}}y_a^{\alpha})/v_{*} & -\mu_z^{\omega_z} + \mu_z^{\dot{\alpha}}\\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}w_x\\ w_y\\ w_{yx}\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5-35}
$$

或者写成

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_l = \mathbf{A}_l\mathbf{x}_l + \mathbf{B}_l\mathbf{u}_l + \mathbf{C}_l\mathbf{g}_l \tag{5-36}$$

其中　$\mathbf{x}_l = [\Delta v \ \ \Delta\alpha_d \ \ \Delta\omega_z \ \ \Delta\vartheta]^T$　　状态矢量

　　　$\mathbf{u}_l = [\Delta\delta_z \ \ \Delta P_c]^T$　　控制矢量

　　　$\mathbf{g}_l = [w_x \ \ w_y \ \ w_{yx}]^T$　　突风矢量

下标 l 表示纵向。

有了方程（5-35），就能够计算飞行器对大气紊流的纵向响应特性。

4·4　横侧运动方程

取第四章中线性化的横侧小扰动方程（4-23）、（4-24）、（4-25），并且考虑紊流速度的效应 β_g、ω_{xg}、ω_{yg1}、ω_{yg2} 的公式（5-24）、（5-26）、（5-27）、（5-28），就得到在大气紊流中的横侧运动方程。

方程（4-23）成为

$$\begin{aligned}
& mv_*\frac{d\Delta\beta_d}{dt} - mv_*\alpha_*\Delta\omega_x - mv_*\Delta\omega_y \\
&= (-Q_* + Z^\beta)\left(\Delta\beta_d - \frac{w_z}{v_*}\right) + Z^{\omega_x}(\Delta\omega_x + w_{yz}) + \\
&\quad + Z^{\omega_y}\Delta\omega_y + (Z^{\omega_y})_1 w_{zx} - (Z^{\omega_y})_2 w_{xz} + \\
&\quad + Z^{\delta_y}\Delta\delta_y + mg\cos\vartheta_*\Delta\gamma
\end{aligned} \tag{5-37}$$

方程（4-24）成为

$$\begin{aligned}
& I_x\frac{d\Delta\omega_x}{dt} - I_{xy}\frac{d\Delta\omega_y}{dt} \\
&= M_x^\beta\left(\Delta\beta_d - \frac{w_z}{v_*}\right) + M_x^{\omega_x}(\Delta\omega_x + w_{yz}) + M_x^{\omega_y}\Delta\omega_y + \\
&\quad + M_x^{\omega_y 1}w_{zx} - M_x^{\omega_y 2}w_{xz} + M_x^{\delta_x}\Delta\delta_x + M_x^{\delta_y}\Delta\delta_y
\end{aligned} \tag{5-38}$$

方程（4-25）成为

$$\begin{aligned}
& I_y\frac{d\Delta\omega_y}{dt} - I_{xy}\frac{d\Delta\omega_x}{dt} \\
&= M_y^\beta\left(\Delta\beta_d - \frac{w_z}{v_*}\right) + M_y^{\omega_x}(\Delta\omega_x + w_{yz}) + M_y^{\omega_y}\Delta\omega_y + \\
&\quad + M_y^{\omega_y 1}w_{zx} - M_y^{\omega_y 2}w_{xz} + M_y^{\delta_x}\Delta\delta_x + M_y^{\delta_y}\Delta\delta_y
\end{aligned} \tag{5-39}$$

除了利用式（4-64）和（4-69）所定义的横侧动力导数以外，还定义如下导数：

$$\left.\begin{aligned}
\mu_x^{\omega_y 1} &= \frac{M_x^{\omega_y 1} + (I_{xy}/I_y)M_y^{\omega_y 1}}{I_x - I_{xy}^2/I_y} \\
\mu_x^{\omega_y 2} &= \frac{M_x^{\omega_y 2} + (I_{xy}/I_y)M_y^{\omega_y 2}}{I_x - I_{xy}^2/I_y} \\
\mu_y^{\omega_y 1} &= \frac{M_y^{\omega_y 1} + (I_{xy}/I_x)M_x^{\omega_y 1}}{I_y - I_{xy}^2/I_x} \\
\mu_y^{\omega_y 2} &= \frac{M_y^{\omega_y 2} + (I_{xy}/I_x)M_x^{\omega_y 2}}{I_y - I_{xy}^2/I_x}
\end{aligned}\right\} \tag{5-40}$$

通常z^{ω_x}和z^{ω_y}可以忽略。于是把方程（5-37）、（5-38）、（5-39）改写一下，再加上运动学关系式，就形成了考虑紊流影响的横侧小扰动方程组的矩阵形式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\beta_d\\ \omega_x\\ \omega_y\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z^\beta & \alpha_* & 1 & g\cos\vartheta_*/v_*\\ \mu_x^\beta & \mu_x^{\omega_x} & \mu_x^{\omega_y} & 0\\ \mu_y^\beta & \mu_y^{\omega_x} & \mu_y^{\omega_y} & 0\\ 0 & 1 & -\mathrm{tg}\vartheta_* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_d\\ \omega_x\\ \omega_y\\ \gamma\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0 & z^{\delta_y}\\ \mu_x^{\delta_x} & \mu_x^{\delta_y}\\ \mu_y^{\delta_x} & \mu_y^{\delta_y}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z^\beta/v_* & 0 & 0 & 0\\ -\mu_x^\beta/v_* & \mu_x^{\omega_x} & \mu_x^{\omega_{y1}} & -\mu_x^{\omega_{y2}}\\ -\mu_y^\beta/v_* & \mu_y^{\omega_x} & \mu_y^{\omega_{y1}} & -\mu_y^{\omega_{y2}}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_z\\ w_{yz}\\ w_{zx}\\ w_{xz}\end{pmatrix}\tag{5-41}$$

或者写成

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_s=\mathbf{A}_s\mathbf{x}_s-\mathbf{B}_s\mathbf{u}_s+\mathbf{C}_s\mathbf{g}_s\tag{5-42}$$

其中　$\mathbf{x}_s=(\beta_d\ \ \omega_x\ \ \omega_y\ \ \gamma)^T$　　状态矢量

$\mathbf{u}_s=(\delta_x\ \ \delta_y)^T$　　控制矢量

$\mathbf{g}_s=(w_z\ \ w_{yz}\ \ w_{zx}\ \ w_{xz})^T$　　突风矢量

在许多情况下，可以忽略梯度w_{xz}的影响，而且近似地以全机的$M_x^{\omega_y}$、$M_y^{\omega_y}$代替$M_x^{\omega_{y1}}$、$M_y^{\omega_{y1}}$，这样，方程（5-41）的右边最后一项就简化为

$$+\begin{pmatrix}-z^\beta/v_* & 0 & 0\\ -\mu_x^\beta/v_* & \mu_x^{\omega_x} & \mu_x^{\omega_y}\\ -\mu_y^\beta/v_* & \mu_y^{\omega_x} & \mu_y^{\omega_y}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_z\\ w_{yz}\\ w_{zx}\end{pmatrix}\tag{5-43}$$

4-5 运动方程的运用

虽然运动方程（5-35）和（5-41）可以用来计算和分析飞行器对任何性质的突风（包括随机突风和离散突风）的响应（只要突风速度远小于飞行速度），但主要还是计算和分析飞行器对随机突风（即连续大气紊流）的响应特性。其主要步骤如下：

第一，按照运动方程，推导出状态矢量对突风矢量的传递函数矩阵；

第二，根据设计规范，确定紊流的尺度和强度，并且按选定的大气紊流模型（例如Von Karman 模型或 Dryden 模型），确定大气紊流的各分量（亦即方程（5-35）和（5-41）中突风矢量的分量）的频谱密度和交叉频谱密度，亦即突风的频谱密度矩阵；

第三，按照线性系统的随机过程理论方法，由以上两个矩阵，计算出响应量（亦即状态矢量）的频谱密度矩阵。进而计算响应量的各种概率特性。

关于这个问题的详细理论和方法，读者可查阅文献[1]，[6]等。

第六章　飞行器运动的计算和分析方法

§1　引　　言

以上各章中已经建立了各种类型飞行器在各种飞行条件下的运动方程。但是为了得出对飞行器设计和使用有意义的结论，还必须设法求解这些方程。本章的目的就是讲述飞行器运动方程的求解方法。

运动方程的性质不同，则求解的方法也不相同。我们将考虑以下三种情况：

第一种情况是线性微分方程组。主要是常系数线性微分方程组，第四章中建立的飞行器小扰动线化方程组就是属于这种情况。这样的运动方程可以用解析法求解。它包括：求出飞行器运动的特征值和特征矢量；在初始扰动后飞行器的运动过程；飞行器对操纵作用的响应过程；飞行器运动变量对操纵作用的传递函数以及相应的频率特性。至于变系数线性微分方程组的求解方法只作简要介绍。所有这些问题都属于一般的线性系统动力学问题。

第二种情况是非线性、变系数的微分方程组。第二、三章及第五章（部分）的运动方程（即所谓"全量"方程）即属于这种情况。这样的方程一般只能用数值法求解，即在给定的初始条件和给定的操纵输入作用下求出飞行器运动的数值结果。为此要介绍微分方程组的数值求解方法。

第三种情况是非线性的代数或超越方程组，即描述飞行器平衡状态的方程组。这样的方程组往往只能用逼近方法求解。

§2　作为綫性系統的飞行器的动态特性分析

2-1　概　述

第四章中得到的飞行器小扰动线化方程组，无论是纵向的还是横侧向的，均可以归纳成如下一般形式：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{6-1}$$

其中　$\mathbf{x}$ 是 n 维状态矢量；

$\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 维系统矩阵（或称状态矩阵）；

$\mathbf{u}$ 是 m 维控制矢量；

$\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 维控制矩阵。

若按照系数冻结法，认为矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是不随时间而变的矩阵。这样，以方程（6-1）描述的动力学系统便是定常线性系统。这样的系统可以用解析法完满地进行研究，并且得到解析解。下面 2-2 至 2-5 中讲述定常线性系统的动态特性分析；2-6 中讲述非定常（时变）线性系统的动态特性分析。

2-2 无操纵输入时定常线性系统的动态特性

无操纵输入（即控制矢量$\mathbf{u}=0$）时作为定常线性系统的飞行器的运动由如下方程来描述：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{6-2}$$

1．用Laplace变换法求解

方程（6-2）进行Laplace变换后成为

$$s\bar{\mathbf{x}}(s)=\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(s)+\mathbf{x}(0)$$

其中$\bar{\mathbf{x}}(s)$表示$\mathbf{x}(t)$的Laplace变换式；$\mathbf{x}(0)$是$\mathbf{x}(t)$的初始值。于是

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\bar{\mathbf{x}}(s)=\mathbf{x}(0)$$

或

$$\bar{\mathbf{x}}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{6-3}$$

根据线性代数原理，逆矩阵可表示为

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{1}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}\mathrm{adj}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}] \tag{6-4}$$

上式中adj表示伴随矩阵。按定义，$n\times n$维伴随矩阵$\mathrm{adj}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$的第$i$行第$j$列的元素是$n\times n$维矩阵$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$的第$j$行第$i$列的元素的代数余子式，即在矩阵$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$中划去第$j$行第$i$列后所剩下的$n-1$阶行列式乘以$(-1)^{i+j}$。因而它是$n-1$阶多项式（当$i=j$时）或$n-2$阶多项式（当$i\neq j$时）。

式（6-4）的分母是行列式。令

$$\Delta(s)=|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|=s^n+c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1s+c_0 \tag{6-5}$$

它是n阶多项式，称为矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式。

现在将式（6-4）、(6-5）代入式（6-3），得

$$\bar{\mathbf{x}}(s)=\frac{\mathrm{adj}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]}{\Delta(s)}\mathbf{x}(0)$$

利用Heaviside公式将上式进行Laplace逆变换，就得到由初始条件$\mathbf{x}(0)$引起的系统过渡过程

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(s-s_k)\mathrm{adj}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]}{\Delta(s)}\right\}_{s=s_k}\mathbf{x}(0)e^{s_k t} \tag{6-6}$$

其中 s_k $(k=1，2，\cdots，n)$ 是特征方程式

$$\Delta(s)=s^n+c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1s+c_0=0 \tag{6-7}$$

的根，称为系统的特征根或矩阵$\mathbf{A}$的特征值。由于$\mathbf{A}$是实数矩阵，故这些特征值一定是实数或共轭复数。应注意，式（6-6）只适用于特征方程式（6-7）为互异的n个特征根的情况。当特征根存在重根时，需参阅有关文献（例如[1]）。

2．特征矢量与运动模态

矩阵$\mathbf{A}$的重要特性，除了特征值以外，还有与每个特征值s_k相对应的特征矢量$\mathbf{p}_k$。按定义，特征值s_k与对应的特征矢量$\mathbf{p}_k$满足如下方程：

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_k=s_k\mathbf{p}_k \tag{6-8}$$

或
$$[s_k\mathbf{I}-\mathbf{A}]\mathbf{p}_k=0 \tag{6-9}$$
因为特征值 s_k 已满足条件
$$|s_k\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\Delta(s_k)=0$$
故可知齐次线性代数方程（6-9）有非零解。

将式（6-4）前乘以$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$，得
$$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|\mathbf{I}=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\text{adj}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$$
当 $s=s_k$ 时，上式左边为零矩阵，故改写成
$$[s_k\mathbf{I}-\mathbf{A}]\text{adj}[s_k\mathbf{I}-\mathbf{A}]=0 \tag{6-10}$$
由此可见，$\text{adj}[s_k\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ 的任何一列均满足特征矢量的定义方程(6-9)。所以，$\text{adj}[s_k\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ 的任何一个非零列均可取为对应于 s_k 的特征矢量 $\mathbf{p}_k$（这些非零列彼此均成比例，故可以随便取哪一列）。这就是计算特征矢量的实用方法。

由 n 个特征矢量按列组成的矩阵
$$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n] \tag{6-11}$$
称为特征矩阵。

如果取
$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{p}_k e^{s_k t}$$
则有
$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{p}_k s_k e^{s_k t}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{p}_k e^{s_k t}$$
考虑到条件(6-8)，可见$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$。这表明，对于任何一个 k，$\mathbf{p}_k e^{s_k t}$ 是方程的解。而且在各特征值互不相等（即无重特征值）的条件下，各个 $\mathbf{p}_k e^{s_k t}$ 是线性无关的。所以包含 n 个任意常数 c_i 的线性组合
$$\mathbf{x}(t)=c_1\mathbf{p}_1 e^{s_1 t}+c_2\mathbf{p}_2 e^{s_2 t}+\cdots+c_n\mathbf{p}_n e^{s_n t} \tag{6-12}$$
就是微分方程（6-2）的通解。其中的任意常数 c_i 由初始条件决定
$$\mathbf{x}(0)=c_1\mathbf{p}_1+c_2\mathbf{p}_2+\cdots+c_n\mathbf{p}_n \tag{6-13}$$
化成标量，则上式成为 n 个线性方程，由此可以确定 n 个常数c_i。

表达式（6-12）具有重要意义，它表明，一般情况下定常线性系统的运动是由 n 个形式为$\mathbf{p}_k e^{s_k t}$的基本运动组成的。每一个这样的基本运动称为一个运动模态。

考虑特征值的两种情况。第一，当某个s_k为实数时，$\mathbf{p}_k e^{s_k t}$就是按指数规律$e^{s_k t}$变化的非周期模态，其中各分量保持着固定的比例关系；第二，若某个s_k是复数，则必然有另一个s_{k+1}与之共轭
$$s_{k,\,k+1}=\eta\pm i\omega$$
这时对应的特征矢量也是共轭的
$$\mathbf{p}_{k,\,k+1}=\mathbf{r}\pm i\mathbf{q}$$
对应的常数也是共轭的
$$c_{k,\,k+1}=A\pm iB$$
这一对共轭复模态之和为
$$c_k\mathbf{p}_k e^{s_k t}+c_{k+1}\mathbf{p}_{k+1}e^{s_{k+1}t}$$

$$-(A+iB)(\mathbf{r}+i\mathbf{q})e^{(\eta+i\omega)t}+(A-iB)(\mathbf{r}-i\mathbf{q})e^{(\eta-i\omega)t}$$
$$=\cdots=2e^{\eta t}[(A\mathbf{r}-B\mathbf{q})\cos\omega t-(A\mathbf{q}+B\mathbf{r})\sin\omega t] \qquad (6\text{-}14)$$

这是一个周期模态（振荡模态），其中各个分量的振幅均按指数规律$e^{\eta t}$变化，且保持着固定的比例关系，相位也保持固定的关系。

在特殊的初始条件$\mathbf{x}(0)=c_k\mathbf{p}_k$激发下，系统的运动为

$$\mathbf{x}(t)=c_k\mathbf{p}_k e^{s_k t}$$

这表明，只有当初始条件符合某个特征矢量时，系统的运动才由单个模态组成。

3．特征坐标与解耦方程

设：利用特征矩阵 $\mathbf{P}$ 将状态矢量 $\mathbf{x}$ 进行线性变换

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{z} \qquad (6\text{-}15)$$

则系统方程（6-2）变换成

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z}$$

或
$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} \qquad (6\text{-}16)$$

令
$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{S}$$

则
$$\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathbf{S}$$

即
$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n]=[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n]\mathbf{S}$$

将此式与式（6-8）比较，可见 $\mathbf{S}$ 是由特征值s_k（$k=1，2，\cdots，n$）组成的对角矩阵

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}17)$$

于是，方程（6-16）成为

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{S}\mathbf{z} \qquad (6\text{-}18)$$

即
$$\dot{z}_k=s_k z_k \qquad (k=1，2，\cdots，n) \qquad (6\text{-}19)$$

可见，经过线性变换（6-15）后形成的以特征坐标矢量 $\mathbf{z}$ 表示的系统方程是 n 个互不耦合的（或者说已解耦的）方程。显然，方程（6-19）的解为

$$z_k(t)=e^{s_k t}z_k(0) \qquad (6\text{-}20)$$

方程组（6-18）的解可以写成

$$\mathbf{z}(t)=\begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & & \\ & e^{s_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{s_n t} \end{bmatrix}\mathbf{z}(0)$$
$$=e^{st}\mathbf{z}(0) \qquad (6\text{-}21)$$

4．$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}$的计算

这里介绍一个计算特征多项式和伴随矩阵的实用方法（引自文献[15]，稍加改动）。令

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{\mathrm{adj}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}$$

$$= \frac{\mathbf{R}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{R}_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \mathbf{R}_1 s + \mathbf{R}_0}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0} \qquad (6\text{-}22)$$

首先取

$$\mathbf{R}_n = 0, \qquad c_n = 1$$

然后按如下递推公式计算：

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}_{n-k} &= c_{n-k+1}\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{R}_{n-k+1} \\ c_{n-k} &= -\frac{1}{k}\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}\mathbf{R}_{n-k}] \\ &(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}23)$$

其中 tr 表示矩阵的迹。

2-3 定常线性系统的传递函数

现考虑有操纵输入的一般情况下的飞行器线化运动方程（6-1），它的 Laplace 变换形式（假定初始条件为零）是

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(s)$$

这里可以将$\bar{\mathbf{u}}$看成输入，$\bar{\mathbf{x}}$看成输出。

输出与输入的 Laplace 变换式之比称为系统的传递函数矩阵

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\bar{\mathbf{x}}(s)}{\bar{\mathbf{u}}(s)} = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}$$

$$= \frac{1}{\Delta(s)}\ \mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{B} \qquad (6\text{-}24)$$

若$\mathbf{x}$为 n 维矢量，$\mathbf{u}$为m维矢量，则$\mathbf{G}(s)$为$n\times m$维矩阵，它的元素$g_{ij}(s)$即是输出量x_i对输入量u_j的传递函数。此传递函数的分母就是 n 阶特征多项式$\Delta(s)$，而分子 $z_{ij}(s)$则是矩阵乘积 $\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{B}$ 的元素，最多是$n-1$阶多项式。

前面[见式（6-22）、（6-23）]已介绍了$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$的行列式和伴随矩阵的计算方法，所以按式（6-24）计算传递函数矩阵就没有什么困难了。

2-4 定常线性系统对操纵输入的响应

1． 直接利用 Laplace 变换

当操纵输入 $\mathbf{u}(t)$ 已给定时，可求出它的 Laplace 变换式$\bar{\mathbf{u}}(s)$，然后根据式（6-24）求出

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{G}(s)\bar{\mathbf{u}}(s)$$

最后对$\bar{\mathbf{x}}(s)$作 Laplace 逆变换，即可求出飞行器的响应过程$\mathbf{x}(t)$。

2． 脉冲响应函数

现考虑特殊情况。设输入量u_j为单位脉冲函数，即 $u_j(t)=\delta(t)$，因而$\bar{u}_j(s)=1$。由此而引起的x_i的响应称为脉冲响应函数$h_{ij}(t)$。这时有

$$\bar{h}_{ij}(s) = \bar{x}_i(s) = g_{ij}(s)\bar{u}_j(s) = g_{ij}(s)$$

所以脉冲响应函数$h_{ij}(t)$等于传递函数 $g_{ij}(s)$ 的 Laplace 逆变换式

$$h_{ij}(t) = L^{-1}[g_{ij}(s)] \qquad (6\text{-}25)$$

由$n\times m$个$h_{ij}(t)$组成的$n\times m$维矩阵$\mathbf{H}(t)$称为脉冲响应矩阵。将式（6-25）推广，就得到

$$\mathbf{H}(t)=L^{-1}[\mathbf{G}(s)] \tag{6-26}$$

3. 利用脉冲响应函数求一般响应

在一般输入$u_j(t)$的情况下，有

$$\bar{x}_i(s)=g_{ij}(s)\bar{u}_j(s)$$

即

$$\bar{x}_i(s)=\bar{h}_{ij}(s)\bar{u}_j(s)$$

因此，可以利用Laplace变换的卷积定理求出飞行器响应

$$x_i(t)=\int_{\tau=0}^{t}h_{ij}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau \tag{6-27}$$

在多个输入情况下，有

$$x_i(t)=\int_{\tau=0}^{t}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau$$

而响应矢量为

$$\mathbf{x}(t)=\int_{\tau=0}^{t}\mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{6-28}$$

2-5 定常线性系统响应的其它问题

除了上述在给定操纵情况下求飞行器响应时间过程的问题外，还有两类在频率域内研究的问题，简单地介绍一下。

第一是飞行器的频率响应特性问题。设操纵量以频率ω作谐波振动

$$u(t)=a_u\cos(\omega t+\varphi_u)$$

在恒稳状态下飞行器响应量x亦以同样频率ω作谐波振动

$$x(t)=a_x\cos(\omega t+\varphi_x)$$

输出与输入的振幅比值和相位差

$$A(\omega)=\frac{a_x}{a_u}$$

$$\varphi(\omega)=\varphi_x-\varphi_u$$

都是频率ω的函数。而且可以指出（不加证明），若$G(s)$是x对u的传递函数，则

$$G(s)|_{s=i\omega}=G(i\omega)=A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} \tag{6-29}$$

$G(i\omega)$称为频率响应函数。

第二是在随机输入作用下飞行器响应问题。设输入量$u(t)$是随机过程，其全部特性以频谱函数$\Phi_u(\omega)$描述。输出对输入的传递函数为$G(s)$。这时输出$x(t)$也是随机过程，其全部特性以频谱函数$\Phi_x(\omega)$描述。而$\Phi_x(\omega)$可按如下关系式计算：

$$\Phi_x(\omega)=|G(i\omega)|^2\Phi_u(\omega) \tag{6-30}$$

以上两个问题都只针对单个输入和单个输出的情况作了介绍。在多输入多输出情况下的关系式暂不讲述。

2-6 非定常线性系统的动态响应

非定常（时变）线性系统的一般方程为

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{6-31}$$

设：对应的齐次方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{6-32}$$

有 n 个线性独立的解矢量$\mathbf{q}_1(t)$、$\mathbf{q}_2(t)$，…，$\mathbf{q}_n(t)$，则它们的线性组合

$$c_1\mathbf{q}_1(t)+c_2\mathbf{q}_2(t)+\cdots+c_n\mathbf{q}_n(t)$$

是方程（6-32）的通解。

设非齐次方程（6-31）的解为

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{Q}(t)\mathbf{y}(t) \tag{6-33}$$

其中

$$\mathbf{Q}(t)=[\mathbf{q}_1(t)\ \ \mathbf{q}_2(t)\ \ \cdots\ \ \mathbf{q}_n(t)]$$

$$\mathbf{y}(t)=[y_1(t)\ \ y_2(t)\ \ \cdots\ \ y_n(t)]^T$$

将式（6-33）代入方程（6-31），得

$$\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{y}(t)+\mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{y}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{6-34}$$

由于每一个$\mathbf{q}_i(t)$（$i=1$，2，…，n）满足齐次方程（6-32），

故

$$\dot{\mathbf{Q}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t) \tag{6-35}$$

因而式（6-34）成为

$$\mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

即

$$\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{6-36}$$

由于$\mathbf{Q}(t)$的各列为线性独立的，故$\mathbf{Q}^{-1}(t)$存在。将式（6-36）积分，得

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{Q}^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{6-37}$$

由式（6-33），有

$$\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{Q}^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

将此式代入式（6-37），然后代入式（6-33），故得

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0)+\mathbf{Q}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{Q}^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

如果令

$$\mathbf{\Phi}(t,\ \tau)=\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^{-1}(\tau) \tag{6-38}$$

则最后得到非齐次方程（6-31）的解为

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,\ t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t,\ \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{6-39}$$

此式右边第一项表示由初始扰动$\mathbf{x}(t_0)$引起的过渡过程；第二项表示由控制$\mathbf{u}(t)$引起的系统响应。

由式（6-38）所定义的$\mathbf{\Phi}(t,\ \tau)$称为状态转移矩阵，式中的$\mathbf{Q}(t)$为基础解系。

不难推出，状态转移矩阵$\mathbf{\Phi}(t,\ \tau)$具有如下性质：

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi}(t,\ t)=\mathbf{I}\\
&\dot{\mathbf{\Phi}}(t,\ \tau)=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Phi}(t,\ \tau)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,\ \tau)\\
&\mathbf{\Phi}(t_2,t_1)=\mathbf{\Phi}(t_2,\ \tau)\mathbf{\Phi}(\tau,\ t_1)\\
&\mathbf{\Phi}(t_2,t_1)=\mathbf{\Phi}^{-1}(t_1,\ t_2)
\end{aligned}\right\} \tag{6-40}
$$

§ 3 作为非綫性系統的飞行器的运动方程的数值求解

3-1 概 述

在本书第二、三、五章（部分）中建立的飞行器运动方程是非线性的常微分方程。非线性不仅仅直接表现在运动方程的形式上，而且存在于飞行器的气动特性和发动机推力特性中，这些特性是用复杂的表达式或实验曲线（并转化成表格）来描述的。所以飞行器运动方程组在大多数情况下不能用解析法求解，只能用数值法求解，即在具体的初始条件和具体的操纵输入条件下求出飞行器运动过程的数值解。

另一方面，数值法对于飞行器运动方程的求解几乎是万能的，只要飞行器的运动能用方程描述出来，无论这些方程以及其中涉及的关系如何复杂，则飞行器的运动总能用数值法解算出来。当然，在现在条件下用数值法求解飞行器运动方程一定离不开电子计算机。

关于常微分方程的数值求解问题是计算数学的一个重要分支。在这方面已作了广泛的研究和分析，提供了许多可用的方法。读者可参阅有关的著作（例如文献[16]）。在大量可用方法中，本书仅介绍个别的方法，主要结合飞行器运动方程的具体条件来加以讲述。

飞行器运动方程一般地可以归纳成如下形式的一阶常微分方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{x}_1=f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\
&\dot{x}_2=f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\dot{x}_n=f_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)
\end{aligned}\right\} \tag{6-41}
$$

或者写成矢量形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}) \tag{6-42}$$

其中

$$\mathbf{x}=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^T \tag{6-43}$$

在方程组（6-41）或（6-42）中不仅直接反映运动方程中的微分方程，而且在函数 $f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 中反映了运动方程中那些以非微分方程形式出现的种种关系式。

微分方程组（6-41）或（6-42）的数值求解方法有许多种。基本上可以分为多步法和一步法两大类。

3-2 多步法

多步法的特点是：步长 h 必须为常数。根据 x 在前面若干步的数值 x_{k-s+1}，x_{k-s+2}，$\cdots$，x_{k-1}，x_k，求出 x 在后一步的数值 x_{k+1}。多步法又可以进而划分为外插法和预报校正法。现仅以四步法为例讲述这类方法的实质。

四步外插法。基本思路是：根据已知的 x_{k-3}，x_{k-2}，x_{k-1}，x_k，算出导数 f_{k-3}，f_{k-2}，

f_{k-1}，f_k，并且通过四点（t_{k-3}，f_{k-3}），（t_{k-2}，f_{k-2}），（t_{k-1}，f_{k-1}），（t_k，f_k）作三次多项式$f^{(3)}(t)$，然后将此多项式延长（外插）至（t_{k+1}，f_{k+1}）点，以$f^{(3)}(t)$从t_k至t_{k+1}的积分值作为x从t_k至t_{k+1}的增量（见图6-1左部）：

$$x_{k+1}-x_k=\int_{t_k}^{t_{k+1}}f^{(3)}(t)\,dt$$

按上述思路经过推导后得到的最后计算公式为

$$x_{k+1}=x_k+h\left(\frac{55}{24}f_k-\frac{59}{24}f_{k-1}+\frac{37}{24}f_{k-2}-\frac{9}{24}f_{k-3}\right) \qquad (6\text{-}44)$$

可见，用此法每前进一个步长h，只需一次计算导数值。

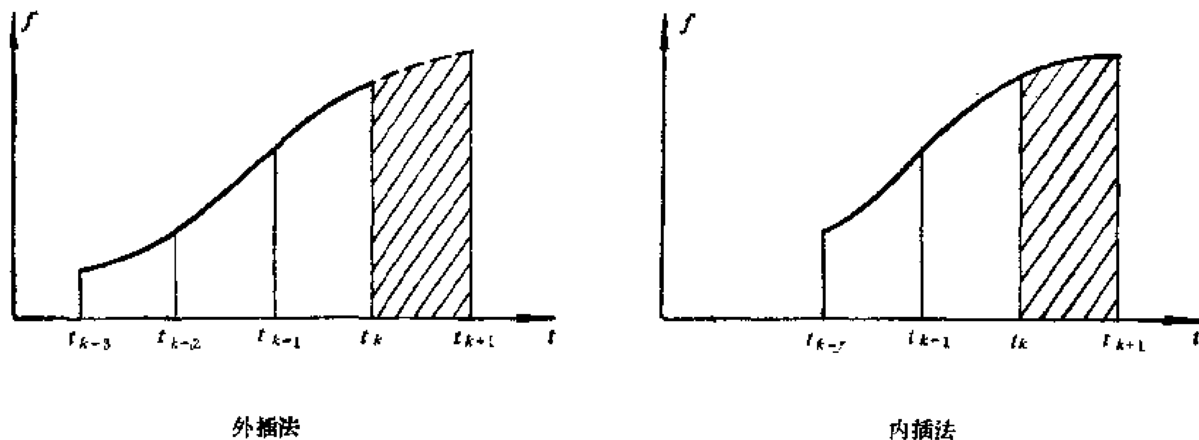


图6-1 四步法示意图

四步预报校正法。基本思路是：首先应用四步外插法的公式(6-44)求出在t_{k+1}处的预报值x'_{k+1}，并根据x'_{k+1}求出该点的导数f'_{k+1}。然后通过四点（t_{k-2}，f_{k-2}），（t_{k-1}，f_{k-1}），（t_k，f_k），（t_{k+1}，f'_{k+1}）作三次多项式$f^{(3)}(t)$，并以$f^{(3)}(t)$从t_k到t_{k+1}的积分作为x从t_k到t_{k+1}的增量（见图6-1右部），再次求出x_{k+1}，作为校正值：

$$x_{k+1}=x_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}f^{(3)}(t)\,dt$$

由于在这个区间内用的是内插法，故它比预报值x'_{k+1}更为精确。

所以预报校正法的实质是：先用外插法预报，然后用内插法校正。计算公式归纳如下：

$$\left.\begin{aligned}
x'_{k+1}&=x_k+h\left(\frac{55}{24}f_k-\frac{59}{24}f_{k-1}+\frac{37}{24}f_{k-2}-\frac{9}{24}f_{k-3}\right)\\
f'_{k+1}&=f(t_{k+1},\ x'_{k+1})\\
x_{k+1}&=x_k+h\left(\frac{9}{24}f'_{k+1}+\frac{19}{24}f_k-\frac{5}{24}f_{k-1}+\frac{1}{24}f_{k-2}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}45)$$

可见，用此法每前进一个步长h，需两次计算导数值。

总之，多步法的缺点是：1. 由于在任何实际问题中，已知初始条件只有一个点（t_0，x_0），故用多步法不能起动，必须借助于一步法（见下述）计算出s个点以后才能采用多步法。这就导致计算程序复杂化；2. 多步法中步长必须为常数，因而不能灵活地改变步长；3. 多步法是以导数f的连续性为前提的，因此当遇到不连续点(例如舵面阶跃偏转，发动机

突然停车的情况）时此方法失效，这时必须重新“起动”。由于以上缺点，多步法在飞行器运动方程求解中使用不多。

3-3 一步法

一步法的特点是：只要有了一点的数值x_k就能求出下一点的数值x_{k+1}。在属于一步法的许多方法中，这里仅讲述标准四阶 Runge-Kutta 法。虽然它并不是最先进、最优越的方法，但仍是目前广泛应用的方法。

标准四阶 Runge-Kutta 法的计算公式如下：

$$\left.\begin{aligned} f_A &= f(t_k,\ x_k) \\ f_B &= f\left(t_k+\frac{1}{2}h,\ \ x_k+\frac{1}{2}f_A h\right) \\ f_C &= f\left(t_k+\frac{1}{2}h,\ \ x_k+\frac{1}{2}f_B h\right) \\ f_D &= f(t_k+h,\ x_k+f_C h) \\ x_{k+1} &= x_k+\frac{1}{6}h(f_A+2f_B+2f_C+f_D) \end{aligned}\right\} \tag{6-46}$$

公式(6-46)的几何解释是(见图6-2)：取B和C的中间点E，通过A，E，D作抛物线，并把抛物线AED所复盖的面积作为增量Δx_k，而$x_{k+1}=x_k+\Delta x_k$。

一步法的优点是：本身能够起动，因而程序较简单；遇到不连续点时沒有困难；步长h可以灵活变动。

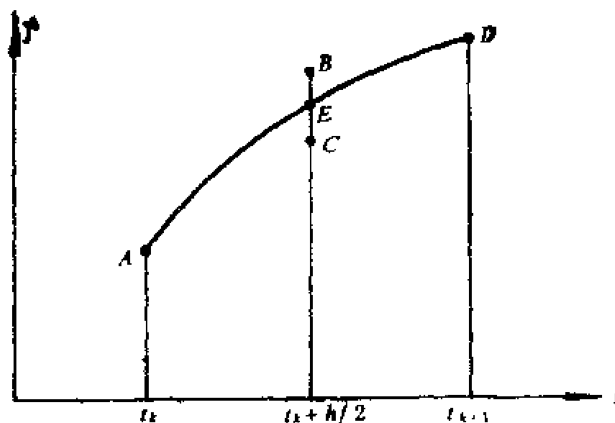


图6-2 Runge-Kutta 法示意图

§ 4 飞行器平衡状态的計算

4-1 概 述

飞行器的平衡状态是由一些非线性方程描述的。由于许多复杂的非线性关系的存在，这些方程往往不能用直接方法求解，只能利用逼近方法求解。

这些非线性方程的一般形式是

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) &= 0 \\ f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ f_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-47}$$

或写成矢量形式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=0 \tag{6-48}$$

在众多方法中，仅讲述两种：Newton-Raphson 法和简单迭代法。

4-2 Newton-Raphson 法

设已经有了第 r 次似近值$\mathbf{x}^{(r)}$，要找出下一次更准确的近似值$\mathbf{x}^{(r+1)}$. 为此将方程（6-48）在$\mathbf{x}^{(r)}$处展开成 Taylor 级数，仅保留线性项

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r)})+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(r)})[\mathbf{x}^{(r+1)}-\mathbf{x}^{(r)}]=0$$

由此得到

$$\mathbf{x}^{(r+1)}=\mathbf{x}^{(r)}-\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(r)})\right]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r)}) \tag{6-49}$$

其中导数$\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}$为 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{6-50}$$

首先估计零次近似值$\mathbf{x}^{(0)}$，逐步应用公式（6-49），得到$\mathbf{x}^{(1)}$，$\mathbf{x}^{(2)}$，…，一直到前后两次结果相差足够小为止。

此方法的收敛性好，效率高。但要求计算偏导数$\partial f_i/\partial x_j$（$i=1$，2，…，$n$；$j=1$，2，…，$n$），在飞行力学问题中这往往是困难的。

4-3 简单迭代法

简单迭代法要求把方程$\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$转化成

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \tag{6-51}$$

的形式。在找到了第 r 次近似值$\mathbf{x}^{(r)}$后，即可求出下一次近似值

$$\mathbf{x}^{(r+1)}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(r)}) \tag{6-52}$$

首先估计零次近似值$\mathbf{x}^{(0)}$，应用公式（6-52），逐次计算$\mathbf{x}^{(1)}$，$\mathbf{x}^{(2)}$，…，直到前后两次结果相差足够小为止。

公式（6-52）称为按全部坐标迭代公式。另一个更有效也更简单的方式称为按部分坐标迭代格式或 Siedel 格式，它的具体公式是

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(r+1)}&=\varphi_1(x_1^{(r)},\ x_2^{(r)},\ \cdots,\ x_n^{(r)}) \\ x_2^{(r+1)}&=\varphi_2(x_1^{(r+1)},\ x_2^{(r)},\ \cdots,\ x_n^{(r)}) \\ \cdots & \qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ x_n^{(r+1)}&=\varphi_n(x_1^{(r+1)},\ \cdots,\ x_{n-1}^{(r+1)},\ x_n^{(r)}) \end{aligned}\right\} \tag{6-53}$$

它的特点是：尽量利用最新结果，因而收敛性更好；而且计算程序也更简单。

必须指出，从$\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$到$\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$的转化不是唯一的。而简单迭代法的收敛性取决于这个转化；在 Siedel 迭代格式中还与 φ_i 的排列顺序有关。至于如何选择转化形式，这主要依靠经验积累及对问题的物理本质的了解；还可以通过试验来选择。一般原则是：从每个方程

中求出起主要作用的未知量。

现在举一个例子来说明。飞机的等速直线运动的方程是

$$
\left.\begin{aligned}
&P\cos(\alpha-\varphi_p)-\frac{1}{2}\rho v^2 S(c_{x0}+a_1\alpha^2+a_2\delta_z^2)-mg\sin\theta=0\\
&P\sin(\alpha+\varphi_p)+\frac{1}{2}\rho v^2 S(c_{y0}+c_y^\alpha\alpha+c_y^{\delta_z}\delta_z)-mg\cos\theta=0\\
&-Pe_p+\frac{1}{2}\rho v^2 S b_A(m_{z0}+m_z^\alpha\alpha+m_z^{\delta_z}\delta_z)=0
\end{aligned}\right\} \tag{6-54}
$$

其中 S、b_A、e_p、φ_p、c_{x0}、a_1、a_2、c_{y0}、c_y^α、$c_y^{\delta_z}$、m_{z0}、m_z^α、$m_z^{\delta_z}$、ρ、v、θ 均为已知，欲求平衡状态的推力P、迎角α和升降舵偏角δ_z。

根据经验和对物理意义的了解，选择的转化形式是：由第二个方程（法向力方程）求所需的迎角

$$
\alpha=\left[\frac{mg\cos\theta-P\sin(\alpha+\varphi_p)}{\frac{1}{2}\rho v^2 S}-c_{y0}-c_y^{\delta_z}\delta_z\right]\Big/c_y^\alpha
$$

由第一个方程（切向力方程）求所需的推力

$$
P=\left[\frac{1}{2}\rho v^2 S(c_{x0}+a_1\alpha^2+a_2\delta_z^2)+mg\sin\theta\right]\Big/\cos(\alpha+\varphi_p)
$$

由第三个方程（力矩方程）求所需的升降舵偏角

$$
\delta_z=\left[\frac{Pe_p}{\frac{1}{2}\rho v^2 S b_A}-m_{z0}-m_z^\alpha\alpha\right]\Big/m_z^{\delta_z}
$$

作为零次近似值，甚至可以取$\alpha^{(0)}=0, P^{(0)}=0$，$\delta_z^{(0)}=0$，采用Siedel迭代格式，能很快地收敛到准确的平衡条件。

反之，假如由切向力方程求δ_z，由法向力方程求P，由力矩方程求 α，则可以肯定迭代过程将失败。

附录　四元数在飞行器运动方程中的应用

1. 引　言

在本书中（也同迄今大多数飞行力学文献中一样），我们利用Euler角来表征两个坐标系之间的关系。例如，机体坐标系相对于地面坐标系的方位是用偏航角 ψ、俯仰角 ϑ 和滚转角 γ 来描述的。而且Euler角变化率与机体旋转角速度的关系是用如下的微分方程来建立的：

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\gamma\sin\vartheta/\cos\vartheta & \sin\gamma\sin\vartheta/\cos\vartheta \\ 0 & \cos\gamma/\cos\vartheta & -\sin\gamma/\cos\vartheta \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

这就是第二章方程（2-46）。这种常规的方法在大多数情况下是可行的，但是在 $\cos\vartheta=0$ 的特殊情况下（例如在研究飞机的空间机动飞行中就可能出现这种情况），上述方程中就会出现奇异点，使计算无法进行下去，也使模拟试验被迫中断。避免这种奇异情况的有效办法就是在飞行器运动方程中用所谓“四元数”（*quaternion*）来代替常规的Euler角。

2. 四元数的定义和性质

四元数是有四个元素的超复数

$$Q=q_0+q_1\mathbf{i}+q_2\mathbf{j}+q_3\mathbf{k} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 是虚数单位，规定它们服从下列运算规则：

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{ii}=\mathbf{jj}=\mathbf{kk}=-1 \\ &\mathbf{ij}=-\mathbf{ji},\ \mathbf{jk}=-\mathbf{kj},\ \mathbf{ki}=-\mathbf{ik} \\ &\mathbf{ij}=\mathbf{k},\ \mathbf{jk}=\mathbf{i},\ \mathbf{ki}=\mathbf{j} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由定义式（2）和规定的运算法则式（3）可见，对于四元数而言，乘法的分配律仍然成立

$$Q_1(Q_2+Q_3)=Q_1Q_2+Q_1Q_3$$

但交换律不成立

$$Q_1Q_2\neq Q_2Q_1$$

四元数 Q 的共轭数定义为

$$\tilde{Q}=q_0-q_1\mathbf{i}-q_2\mathbf{j}-q_3\mathbf{k} \tag{4}$$

不难导出

$$Q\tilde{Q}=\tilde{Q}Q=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=N^2(Q)$$

其中 $N^2(Q)$ 称为四元数的范数的平方。

如果 $N^2(Q)=1$，则 Q 称为单位范化的四元数。在以后我们仅研究这样的四元数。

3．用四元数表示坐标变换

在第一章已指出，任何两个坐标系（例如 S_a 与 S_b）之间的关系可以用三个 Euler 角来确定，亦即第一个坐标系（S_a）依次绕三个轴各旋转一个 Euler 角，就会与第二个坐标系（S_b）重合。

除了上述办法以外，我们还可以设想，对于任何两个共原点的坐标系 S_a 和 S_b，一定能够找到一个旋转轴 OR 和一个角度 α，使得坐标系 S_a 绕轴 OR 转过角度 α 后就变得与坐标系 S_b 重合。设轴 OR 与轴 x，y，z 之间的夹角分别为 β_1，β_2，β_3（这些角在旋转过程中是不变的），而轴 OR 的方向余弦为

$$p_i = \cos\beta_i, \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{5}$$

现在取

$$q_0 = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad q_i = -p_i \sin\frac{\alpha}{2} \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{6}$$

来构成四元数

$$Q_a^b = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \tag{7}$$

这个四元数就能够完全表示坐标系 S_a 和 S_b 的关系。如果 S_a 是地面坐标系 S_d、S_b 是机体坐标系 S_t，则 Q_d^t 就能完全反映飞行器在空间的姿态。

这里可能会提出问题：为什么原来用 Euler 角时只需要三个参数就能表征飞行器的姿态，而用四元数时需要用四个参数呢？原因在于四个参数之间还存在一个范化条件

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{8}$$

或者说，由于旋转轴 OR 的三个方向余弦之间存在约束条件

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{8'}$$

所以实际上只有三个独立参数。

现在把旋转轴 OR 和三个坐标轴 Ox_a、Ox_b、Oy_a、Oy_b、Oz_a、Oz_b 的关系用球面三角学的方法表示在图 1 中。

在这些球面三角形中，已知的边为

$$x_ay_a = y_az_a = z_ax_a = x_by_b = y_bz_b = z_bx_b = \pi/2$$
$$Rx_a = Rx_b = \beta_1 = \arccos p_1$$
$$Ry_a = Ry_b = \beta_2 = \arccos p_2$$
$$Rz_a = Rz_b = \beta_3 = \arccos p_3$$

已知的角为

$$\angle x_ay_az_a = \angle y_az_ax_a = \angle z_ax_ay_a = \angle x_by_bz_b = \angle y_bz_bx_b = \angle z_bx_by_b = \pi/2$$
$$\angle x_aRx_b = \angle y_aRy_b = \angle z_aRz_b = \alpha$$

而未知的边为

$$x_bx_a,\quad x_by_a,\quad x_bz_a,$$
$$y_bx_a,\quad y_by_a,\quad y_bz_a,$$
$$z_bx_a,\quad z_by_a,\quad z_bz_a。$$

在球面三角形 x_aRx_b 中，两个边（Rx_a 和 Rx_b）和夹角（$\angle x_aRx_b$）是已知的，故可以

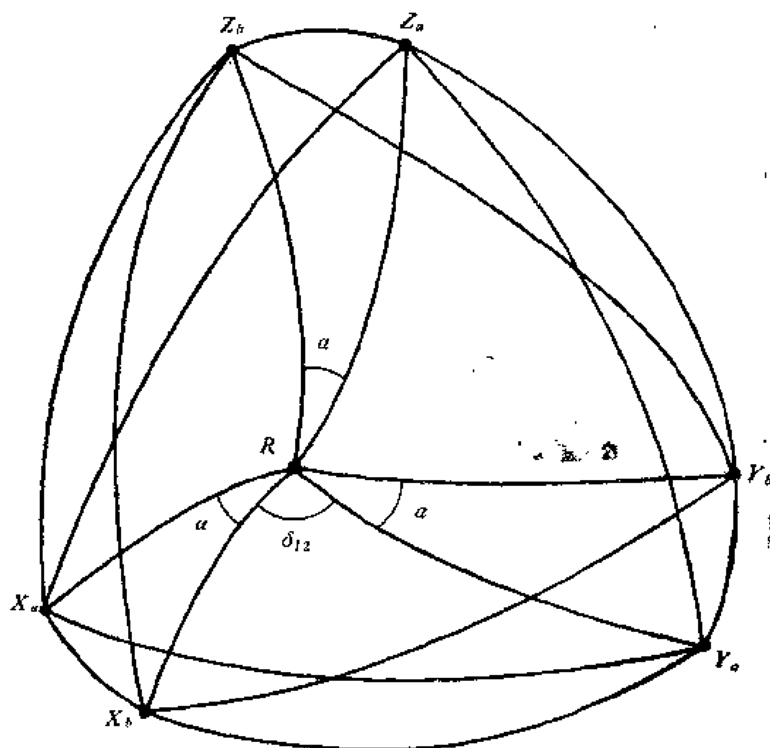


图 1　球面三角关系

利用余弦定理求解

$$\cos(x_b x_a) = \cos^2\beta_1 + \sin^2\beta_1 \cos\alpha \tag{9}$$

在球面三角形$Rx_a y_a$中，三个边均为已知，且$\cos(x_a y_a)=0$，故应用余弦定理得

$$0 = \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos(\alpha+\delta_{12}) \tag{10}$$

由此可解出 δ_{12}

在球面三角形$Rx_b y_a$中，两个边（β_1，β_2）和夹角（δ_{12}）为已知，故可求出第三边

$$\cos(x_b y_a) = \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\delta_{12} \tag{11}$$

按上述步骤，原则上可求出未知边$x_b x_a$和$x_b y_a$。其余的七个边($x_b z_a$、$y_b x_a$、$y_b y_a$、$y_b z_a$、$z_b x_a$、$z_b y_a$、$z_b z_a$）也可以用类似的方法求出。而这九个边（实际上是九个角）的余弦正是S_a和S_b之间的坐标变换矩阵的元素

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_b x_a) & \cos(x_b y_a) & \cos(x_b z_a) \\ \cos(y_b x_a) & \cos(y_b y_a) & \cos(y_b z_a) \\ \cos(z_b x_a) & \cos(z_b y_a) & \cos(z_b z_a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$$

在求解以上一些球面三角形并经过许多代数运算（推导从略）以后，最后得到

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \tag{12}$$

这就是用四元数进行坐标变换的公式。它等价于如下的表达式：

$$x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k} = (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k})(q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k})$$

或 $$\mathbf{r}_b = Q_a^b \mathbf{r}_a \tilde{Q}_a^b \tag{13}$$

如果说由S_a到S_b的转移是S_a绕轴OR转过角α而实现的，则反过来由S_b到S_a的转移就是S_b绕轴OR转过角$-\alpha$而实现的。根据式(6)，与式（7）相对应的是

$$Q_b^a = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k} \tag{14}$$

可见变换四元数有如下性质：

$$Q_b^a = \tilde{Q}_a^b \tag{15}$$

故公式（13）亦可写成

$$\mathbf{r}_b = Q_a^b \mathbf{r}_a Q_b^a \tag{16}$$

如果接连进行两次变换

$$\mathbf{r}_b = Q_a^b \mathbf{r}_a \tilde{Q}_a^b, \quad \mathbf{r}_c = Q_b^c \mathbf{r}_b \tilde{Q}_b^c$$

则 $$\mathbf{r}_c = Q_b^c Q_a^b \mathbf{r}_a \tilde{Q}_a^b \tilde{Q}_b^c$$

或 $$\mathbf{r}_c = Q_a^c \mathbf{r}_a \tilde{Q}_a^c$$

而 $$Q_a^c = Q_b^c Q_a^b \tag{17}$$

且Q的各元素为

$$\left.\begin{aligned}
q_0 &= q_0^{(1)}q_0^{(2)} - q_1^{(1)}q_1^{(2)} - q_2^{(1)}q_2^{(2)} - q_3^{(1)}q_3^{(2)}\\
q_1 &= q_0^{(1)}q_1^{(2)} + q_1^{(1)}q_0^{(2)} - q_2^{(1)}q_3^{(2)} + q_3^{(1)}q_2^{(2)}\\
q_2 &= q_0^{(1)}q_2^{(2)} + q_1^{(1)}q_3^{(2)} + q_2^{(1)}q_0^{(2)} - q_3^{(1)}q_1^{(2)}\\
q_3 &= q_0^{(1)}q_3^{(2)} - q_1^{(1)}q_2^{(2)} + q_2^{(1)}q_1^{(2)} + q_3^{(1)}q_0^{(2)}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中 $q_0^{(1)}$，$q_0^{(2)}$，…分别为Q_1和Q_2的元素。

4. 四元数与Euler角的关系

按第二章所讲述的，若地面坐标系S_d首先绕轴y_d转过偏航角ψ，然后绕轴z'转过俯仰角ϑ，最后绕轴x_t转过滚转角γ，就与机体坐标系S_t重合。于是，这三次旋转所对应的变换四元数为

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{\cos(\psi/2),\ 0,\ -\sin(\psi/2),\ 0\}\\
Q_2 &= \{\cos(\vartheta/2),\ 0,\ 0,\ -\sin(\vartheta/2)\}\\
Q_3 &= \{\cos(\gamma/2),\ -\sin(\gamma/2),\ 0,\ 0\}
\end{aligned}$$

于是由地面系到机体系的坐标变换四元数为

$$Q = Q_3 Q_2 Q_1$$

展开后得到Q的各元素为

$$\left.\begin{aligned}
q_0 &= \cos(\gamma/2)\cos(\vartheta/2)\cos(\psi/2) - \sin(\gamma/2)\sin(\vartheta/2)\sin(\psi/2)\\
q_1 &= -\cos(\gamma/2)\sin(\vartheta/2)\sin(\psi/2) - \sin(\gamma/2)\cos(\vartheta/2)\cos(\psi/2)\\
q_2 &= -\cos(\gamma/2)\cos(\vartheta/2)\sin(\psi/2) - \sin(\gamma/2)\sin(\vartheta/2)\cos(\psi/2)\\
q_3 &= -\cos(\gamma/2)\sin(\vartheta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\gamma/2)\cos(\vartheta/2)\sin(\psi/2)
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

这就是由Euler角求四元数分量的公式。

另一方面，若把等式（12）中的x_b、y_b、z_b换成x_t、y_t、z_t，把x_a、y_a、z_a换成x_d、y_d、z_d，则等式右边的矩阵就应等于从S_d到S_t的坐标变换矩阵$\mathbf{B}_d^t$，而这个矩阵$\mathbf{B}_d^t$已在第二

章的式（2-2）中给出。于是，只要比较这两个矩阵的相应元素，就能得到所需要的由四元数求 Euler 角的公式（以组合形式给出更为方便）

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta &= 2(q_1q_2 - q_0q_3) \\ \cos\vartheta\sin\gamma &= -2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ \cos\vartheta\cos\gamma &= q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \\ \mathrm{tg}\psi &= -\frac{2(q_1q_3 + q_0q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

5. 四元数分量的微分方程式

在飞行器运动过程中，飞行器姿态不断变化，因而表征飞行器姿态的机体四元数（更确切地说是由地面系到机体系的变换四元数）的分量也不断地变化。因此需要用微分方程式来描述这种变化。

首先，可以写出如下方程式：

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial q_0/\partial\gamma & \partial q_0/\partial\psi & \partial q_0/\partial\vartheta \\ \partial q_1/\partial\gamma & \partial q_1/\partial\psi & \partial q_1/\partial\vartheta \\ \partial q_2/\partial\gamma & \partial q_2/\partial\psi & \partial q_2/\partial\vartheta \\ \partial q_3/\partial\gamma & \partial q_3/\partial\psi & \partial q_3/\partial\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

其中的偏导数 $\partial q_0/\partial\gamma$、$\partial q_0/\partial\psi$、…可以由公式（19）推导出。

然后，把已知的方程（1）代入上式的右边，展开以后，最后得到十分简单的微分方程式

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{21}$$

其中 ω_x、ω_y、ω_z 就是机体旋转角速度。

6. 利用四元数建立的飞行器运动方程组

这里采用的力方程和力矩方程都是在机体坐标系中建立的运动方程体系，即 T-T 体系（参看第二章）。原来的大多数方程都可以保持不变，仅两组方程需要改变。第一是利用公式（20）把包含 Euler 角的力方程［见第二章方程（2-31）］改成包含四元数的形式，即

$$\begin{aligned} m\left(\frac{dv_{xt}}{dt} + \omega_y v_{zt} - \omega_z v_{yt}\right) &= P\cos\varphi_p - Q\cos\alpha\cos\beta + Y\sin\alpha - \\ &\quad - Z\cos\alpha\sin\beta - 2mg(q_1q_2 - q_0q_3) \\ m\left(\frac{dv_{yt}}{dt} + \omega_z v_{xt} - \omega_x v_{zt}\right) &= P\sin\varphi_p + Q\sin\alpha\cos\beta + Y\cos\alpha + \\ &\quad + Z\sin\alpha\sin\beta - mg(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) \\ m\left(\frac{dv_{zt}}{dt} + \omega_x v_{yt} - \omega_y v_{xt}\right) &= -Q\sin\beta + Z\cos\beta - 2mg(q_2q_3 + q_0q_1) \end{aligned} \tag{22}$$

第二是用方程（21）代替原来的方程（2-46）。

至于航迹坐标系中的力方程如何改造，这里就不讲述了。

最后总结一下，在飞行器运动方程组中，采用四元数以代替 Euler 角，有两个优点：第一，可以避免出现奇异点，而保证在任何条件下计算或模拟试验不会因此而中断；第二，减少了一些三角函数的计算，因而可以节约机时。但也有缺点：四元数的物理意义不如 Euler 角清楚，而且四元数与飞行仪表的读数没有直接联系，而 Euler 角则可以在仪表中显示出来。